Univerzita Karlova

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Výrazy s proměnnou za pomoci algebraických dlaždic

Expressions with variables with the help of agebraic tiles

Vedoucí diplomové práce:	doc. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D.
Autorka diplomové práce:	Ing. Lenka Konrádová
Studijní program:	Učitelství pro střední školy
Studijní obor:	Učitelství všeobecně vzdělávacích předmětů pro základní školy a střední školy – matematika
Forma studia:	kombinovaná

Diplomová práce dokončena: 22. 7. 2020

Prohlašuji, že tuto práci jsem vypracovala samostatně pod vedením vedoucí diplomové práce a veškeré literární prameny a informace, které jsem v práci využila, jsou uvedeny v seznamu literatury.

Byla jsem seznámena s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména se skutečností, že Univerzita Karlova má právo uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona, a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Karlova oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše.

Souhlasím s prezenčním zpřístupněním své práce v Univerzitní knihovně Univerzity Karlovy.

V Praze dne: 22. 7. 2020 Ing. Lenka Konrádová

Poděkování

Ráda bych poděkovala vedoucí diplomové práce doc. RNDr. Nadě Vondrové, Ph.D., za odborné vedení, cenné rady, inspiraci, trpělivost, ochotu a čas, které mi v průběhu zpracování této práce věnovala. Poděkování patří mé kolegyni Mgr. Romaně Zemanové za pomoc při realizaci experimentu a mé rodině za podporu a trpělivost.

Abstrakt

Diplomová práce je zaměřena na výuku výrazů s proměnnou za pomoci algebraických dlaždic v osmém ročníku základní školy a je rozdělena na teoretickou a experimentální část. Ve zvláštní kapitole se věnuji analýze vybraných učebnic.

Prvním cílem této práce bylo analyzovat vybrané učebnice z pohledu algebraických výrazů. Některé poznatky z analýzy učebnic jsem využila pro vlastní výukový experiment, jehož příprava, realizace a vyhodnocení byly druhým cílem práce.

V teoretické části je uveden pohled na výrazy s proměnnou v kurikulárních dokumentech. Dále jsou zde uvedeny pilíře výuky algebraických výrazů. Tato část je doplněna o klasifikaci chyb, kterých se žáci v souvislosti s tématem dopouštějí.

Jádrem práce je experimentální část, ve které je popsána výuka založená na konstruktivistických principech. V přípravě výuky je vysvětlena manipulace s algebraickými dlaždicemi, které byly při výuce použity.

Z výsledků vyplývá, že prostředí algebraických dlaždic pomáhá žákům přiblížit prostředí algebraických výrazů, zlepšit pochopení jejich úprav a snížit počet chyb.

Klíčová slova:

Výrazy s proměnnou, úpravy výrazů, algebraické výrazy, algebraické dlaždice, výuka.

Abstrakt

The diploma with the help of algebraic tiles thesis focuses on teaching expressions with variables in the eighth grade in middle school. It is divided into theoretical and experimental parts. A particular chapter is devoted to an analysis of selected textbooks.

First of all, the aim of this thesis was to analyse mathematics textbooks from the perspective the algebraic expressions. Some knowledge acquired thanks to the textbook analysis was used for my own educational experiment, whose preparation, realisation and assessment were the second objective of this thesis.

The theoretical part provides a look at expressions with variables in curricular documents. Thereafter the pillars of teaching algebraic expressions are presented. This part is completed by the classification of errors made by students in relation to the topic. An analysis of selected textbooks follows the theoretical part.

The core of this thesis is the experimental part, where teaching is based on constructivist principles. The preparation of the course explains the manipulation of the algebra tiles used during the lessons.

After the teaching experiments, we may conclude that the application of algebra tiles helps students get into the environment of algebraic expressions, improves the understanding of the rules of manipulations with expressions and reduces the number of errors.

Keywords:

Variable expressions, manipulating algebraic expressions, algebraic expressions, algebra tiles, teaching

Obsah:

1 Úvod ... 7
2 Teoretická část ... 9
2.1 Algebraické výrazy v kurikulárních dokumentech ... 9
2.1.1 RVP ... 9
2.1.2 ŠVP ... 10
2.1.3 Standardy pro základní vzdělávání ... 10
2.2 Transmisivní a konstruktivistické pojetí výuky ... 13
2.3 Výuka výrazů s proměnnou ... 15
2.3.1 Tři pilíře algebry ... 15
2.3.2 Úvod do výuky ... 17
2.3.3 Chyby při úpravách výrazů s proměnnou ... 18
3 Analýza učebnic z hlediska úprav algebraických výrazů ... 21
3.1.1 Matematika FRAUS (H. Binterová, E. Fuchs, P. Tlustý) ... 21
3.1.2 Matematika PROMETHEUS (O. Odvárko, J. Kadleček) ... 23
3.1.3 Matematika PROMETHEUS (J. Herman a kol.) ... 26
3.1.4 Matematika SPN (Půlpán a kol.) ... 27
3.1.5 Matematika FORTUNA (J. Coufalová a kol.) ... 28
3.1.6 Matematika NOVÁ ŠKOLA (M. Jedličková a kol.) ... 30
4 Experimentální výuka ... 34
4.1 Popis experimentu ... 34
4.1.1 Charakteristika tříd ... 34
4.1.2 Příprava výuky ... 36
4.1.3 Plán experimentální výuky ... 47
4.2 Pre-test ... 80
4.3 Průběh experimentu ... 80
4.4 Vyhodnocení experimentu ... 98
5 Závěr ... 101
Použité zdroje ... 103
Přílohy ... 105

1 Úvod

Diplomová práce je věnována tématu výrazy s proměnnou v osmém ročníku základní školy. Důvod, proč jsem si vybrala toto téma, byla radost, kterou jsem zažívala při úpravách složitějších výrazů na střední škole, v protikladu s neoblibou výrazů u žáků, které jsem učila. Potýkala jsem se s otázkou, jak toto téma žákům přiblížit, aby jej lépe pochopili a změnili svůj náhled na algebraické výrazy.

Prvním cílem této práce bylo analyzovat vybrané učebnice z pohledu algebraických výrazů. Učebnice je důležitou pomůckou učitele i žáka, proto jsem si vybrala pět učebnic matematiky pro 8. ročník základní školy a jednu pro odpovídající ročník víceletého gymnázia. V učebnicích jsem se zaměřila na to, jak jednotliví autoři přistupují k hladině modelování a k hladině strategických manipulací. Některé poznatky z analýzy učebnic jsem využila pro vlastní výukový experiment, jehož příprava, realizace a vyhodnocení byly druhým cílem práce. Výuka byla vedena snahou o vytvoření podnětného prostředí s využitím algebraických dlaždic, přičemž mým cílem bylo, aby si znalosti žáci osvojili s porozuměním. Předpokládala jsem, že algebraické dlaždice mohou být pro žáky vhodným generickým modelem, pomocí něhož mohou nahlédnout do významu příslušných algebraických úprav.

Diplomová práce je rozdělena na tři části, a to na teoretickou a experimentální a na analýzu učebnic. Analýza učebnic je na pomezí teorie a praxe, proto jsem jí věnovala samostatnou kapitolu. V teoretické části se zabývám kurikulárními dokumenty, ve kterých jsou formulovány očekávané výstupy týkající se daného tématu. Dále jsem si prostudovala konstruktivistické pojetí výuky zvláště pak tzv desatero konstruktivismu (Kuřina, Hejný, 2015). Při plánování výuky bylo také důležité znát tři pilíře výuky výrazů s proměnnou (Vondrová, Nováková, 2015) a vzhledem k tomu, že k výuce patří i práce s chybou, tak ve své práci uvádím sedm druhů chyb při úpravách výrazů podle Hejného (1990).

V experimentální části jsem využila znalostí získaných při zpracovávání teoretické části. Pro hladinu modelování jsem připravila číselné řady, opakující se geometrické vzory a přepis slovního vyjádření do symbolického zápisu. Pro hladinu strategických manipulací, kam patří sčítání, odčítání a násobení výrazů, dále pak úprava výrazu na součin pomocí vytýkání nebo pomocí vzorců, jsem zvolila prostředí algebraických dlaždic.

K vyhodnocení výuky jsem sestavila test, při jehož sestavování jsem se inspirovala Metodickými komentáři ke Standardům pro základní vzdělávání. Pro žáky jsem kromě testu připravila také dotazník, ve kterém by žáci měli vyhodnotit svoje znalosti a dovednosti, které získali. V přílohách jsou materiály, které jsem v rámci experimentu vytvořila, pracovní listy, domina a testy, dále je zde zdařilá myšlenková mapa, kterou vytvořili žáci.

2 Teoretická část

2.1 Algebraické výrazy v kurikulárních dokumentech

2.1.1 RVP

Kurikulárním dokumentem státní úrovně, který normativně stanoví obecný rámec vzdělávání, je rámcový vzdělávací program[1] (dále jen RVP). Na národní úrovni je tímto programem garantován povinný rámec učiva, tzn. že RVP stanovuje, co by měl být schopen každý absolvent dané etapy vzdělávání (předškolní, základní, střední) a daného oboru zvládnout. Zároveň je RVP závazný pro tvorbu školních vzdělávacích programů (dále jen ŠVP), podle kterých se uskutečňuje vzdělávání na jednotlivých školách.

Ve své práci se zaměřím na úroveň základního vzdělávání, a proto budu čerpat z rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání (dále jen RVP ZV). RVP ZV platí pro 1. stupeň základního vzdělávání (resp. pro 1.–5. ročník) a pro 2. stupeň základního vzdělávání (resp. pro 6.–9. ročník) i pro odpovídající ročníky šestiletých a osmiletých gymnázií.

Vzdělávací obsah základního vzdělávání je v RVP ZV orientačně rozdělen do devíti vzdělávacích oblastí. Jednou z těchto oblastí je *Matematika a její aplikace,* obsah této oblasti je dále rozdělen na čtyři tematické okruhy. Těmito okruhy jsou okruh *Číslo a proměnná*, který navazuje na okruh *Čísla a početní operace* z prvního stupně, dále pak *Závislosti, vztahy a práce s daty*, *Geometrie v rovině a v prostoru* a *Nestandardní aplikační úlohy a problémy.*

Lze říci, že s výrazy s proměnnou se můžeme setkat ve všech zmíněných okruzích, ale hlavní část učiva týkající se výrazů patří do okruhu *Číslo a proměnná*. Žáci si v rámci tohoto tematického okruhu osvojují aritmetické operace v jejich třech složkách: dovednost provádět operaci, algoritmické porozumění (proč je operace prováděna předloženým postupem) a významové porozumění (umět operaci propojit s reálnou situací). Učí se získávat číselné údaje měřením, odhadováním, výpočtem a zaokrouhlováním. Seznamují se s pojmem proměnná a s její rolí při matematizaci reálných situací. Očekávaný výstup z tohoto okruhu týkající se tématu výrazů, kterými se tato práce zabývá je, že žák matematizuje jednoduché reálné situace s využitím proměnných, určí hodnotu výrazu, sčítá a násobí mnohočleny, provádí rozklad mnohočlenu na součin pomocí vzorců a vytýkáním.

[1] Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. [online]. Praha: MŠMT, 2017. [cit. 2019-08-22] Dostupné na http://www.nuv.cz/t/aktualne-platne-zneni-rvp-zv

2.1.2 ŠVP

Na škole, kde učím, je v ŠVP hlavní část tématu výrazů zařazeno do 8. ročníku. Lomené výrazy jsou řazeny na začátek 9. ročníku.

V 8. ročníku v rámci tématu *Výrazy a jejich využití* si žáci zopakují číselné výrazy, poté se seznámí s výrazem s proměnnou, rozlišují jednočleny a mnohočleny, ty pak sčítají a odčítají, násobí, dělí jednočlen jednočlenem a mnohočlen jednočlenem, určují druhou mocninu dvojčlenu, upravují mnohočleny na součiny a řeší slovní úlohy s výrazy.

V ŠVP jsou určeny výstupy tzn. učivo, které by měl žák zvládat na závěr probrané kapitoly. Žák by měl odlišit proměnnou a konstantu, uvést příklady, zapsat slovní text pomocí výrazu s proměnnými, určit počet členů výrazu, provádět základní operace s mnohočleny, dokázat výraz rozložit na součin, znát a umět použít vzorec pro druhou mocninu součtu, rozdílu a rozdíl druhých mocnin.

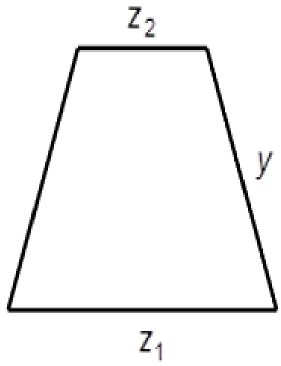
V 9. ročníku si žáci rozšíří znalosti o lomené výrazy. V této části žáci propojují své znalosti zlomků s výrazy, učí se určovat definiční obor lomeného výrazu, hledají společný násobek a dělitel výrazů, rozšiřují a krátí lomené výrazy a provádí s nimi početní výkony. ŠVP určuje výstupy, které by měl žák na závěr této kapitoly splnit. Jsou to, žák určí podmínky existence výrazu, krátí a rozšiřuje lomený výraz, lomené výrazy sčítá, odčítá, násobí a dělí.

RVP ZV dává široký prostor učiteli, je na něm, jakým způsobem dovede své žáky k cíli, jaké použije metody a formy výuky. Pro správné naplnění cílů učitelem byly Ministerstvem školství mládeže a tělovýchovy vytvořeny Standardy pro základní vzdělávání.

2.1.3 Standardy pro základní vzdělávání

Standardy pro základní vzdělávání[2] představují minimální cílové požadavky na vzdělávání. Smyslem standardů je účinně napomáhat učitelům při naplňování cílů vzdělávání stanovených v RVP ZV. Vycházejí z očekávaných výstupů vzdělávacích oborů stanovených v RVP ZV. Tyto výstupy dále pomocí indikátorů, které slouží jako nástroj k zpřesnění požadavků na znalosti a dovednosti každého žáka, konkretizují a doplňují o ukázky ilustrativních úloh, viz. obrázek 1. Očekávané výstupy vymezují předpokládanou způsobilost využívat osvojené učivo na konci 3., 5. a 9. ročníku.

[2] *Standardy pro základní vzdělávání* [online]. Praha: Národní ústav pro vzdělávání [cit. 2019-10-24]. Dostupné z: https://digifolio.rvp.cz/artefact/file/download.php?file=67490&view=9832

Vzdělávací obor	Matematika a její aplikace
Ročník	9.
Tematický okruh	1. Číslo a početní operace
Očekávaný výstup RVP ZV	**M-9-1-07** Žák matematizuje jednoduché reálné situace s využitím proměnných; určí hodnotu výrazu, sčítá a násobí mnohočleny, provádí rozklad mnohočlenu na součin pomocí vzorců a vytýkáním
Indikátory	1. žák vypočte hodnotu výrazu pro dané hodnoty proměnných 2. žák využívá při úpravě výrazů vytýkání a vzorce $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $a^2 - b^2$ 3. žák vybere odpovídající výraz, který popisuje jednoduchou reálnou situaci
Ilustrativní úloha	
Obvod rovnoramenného lichoběžníku lze vypočítat podle vztahu $o = z_1 + z_2 + 2y$ Vypočti číselnou hodnotu o, je-li $y = 12$, $z_1 = 15$, $z_2 = 7$. 	
Poznámky k ilustrativní úloze	M-9-1-07.1

Obrázek 1: Ilustrační úloha – obvod lichoběžníku (Fuchs, Zelendová, eds., 2013, s. 80)

Standardy obsahují konkretizované očekávané výstupy v podobě jednotlivých indikátorů, které jsou zde nastaveny na minimální úroveň. Indikátor slouží jako nástroj k zpřesnění požadavků na znalosti a dovednosti každého žáka u očekávaných výstupů. Metodické komentáře tyto Standardy doplňují o modelové úlohy, které jsou vztažené vždy k jednomu indikátoru na třech úrovních obtížnosti – minimální, optimální a excelentní. Trojí úroveň úloh umožňuje pokrýt různou úroveň znalostí a schopností žáků. Úlohy nejvyšší obtížnosti tak aktivizují nadané žáky ve třídě. Součástí těchto úloh jsou metodické komentáře poskytující nejen správnou odpověď, ale také popis požadovaných myšlenkových operací žáků vedoucích k vyřešení jednotlivých úloh.

Ukázky úloh různých obtížností z Metodiky ke Standardům jsou na obrázku 2 až 4.

Ilustrativní úloha 14	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

Zjednoduš $x(x+1)-(x+1)=$

Možná řešení s metodickým komentářem

Řešení:
x^2-1

Úloha je jednoduchá. Problémy mohou být jen při odstraňování druhé závorky. Úloha však může také diagnostikovat, zda žáci uvažují o struktuře výrazu. Dá se totiž řešit vytknutím výrazu $(x+1)$, čímž dostaneme výraz $(x+1)(x-1)$, což je podle vzorce pro rozdíl druhých mocnin rovno x^2-1. Tento způsob řešení však žáci většinou nevolí.

Očekávaný výstup	M-9-1-07 Žák matematizuje jednoduché reálné situace s využitím proměnných; určí hodnotu výrazu, sčítá a násobí mnohočleny, provádí rozklad mnohočlenu na součin pomocí vzorců a vytýkáním

Obrázek 2: Úprava výrazů 1 (Vondrová, Nováková, 2015 s. 37)

Ilustrativní úloha 11	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

Doplň místo teček znaménka operací. Můžeš použít závorky.
$6p \ldots 7 \ldots 2p = 8p + 7$
$6p \ldots 7 \ldots 2p = 12p^2 - 14p$

Možná řešení s metodickým komentářem

Řešení:
$6p + 7 + 2p = 8p + 7$
$(6p - 7) \cdot 2p = 12p^2 - 14p$

Úloha se řadí svým charakterem opět k úlohám inverzním – místo úpravy algebraického výrazu mají žáci výraz vytvořit. První část je jednodušší, i když žáci nemohou výraz číst mechanicky zleva doprava, ale musejí si uvědomit jeho strukturu a použít komutativní zákon.
U druhé úlohy je obtížné to, že se musí použít závorky, s čímž mají žáci často potíže. Problém je v tom, že když už si žáci nutnost závorek uvědomí, automaticky předpokládají, že prvním členem se bude závorka násobit (tedy uzávorkují členy 7 a $2p$). Lze se domnívat, že tento impuls je způsoben tím, že žáci se častěji setkají s výrazem ve tvaru $2p \cdot (6p - 7)$ než ve tvaru $(6p - 7) \cdot 2p$.

Očekávaný výstup	M-9-1-07 Žák matematizuje jednoduché reálné situace s využitím proměnných; určí hodnotu výrazu, sčítá a násobí mnohočleny, provádí rozklad mnohočlenu na součin pomocí vzorců a vytýkáním

Obrázek 3: Úprava výrazů 2 (Vondrová, Nováková, 2015 s. 35)

Ilustrativní úloha 10	Obtížnost	minimální	optimální	excelentní

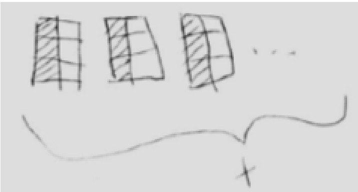
Vyber všechny odpovědi, které odpovídají situaci vyjádřené rovností $6x - 3y = 18$.

a) Každé dítě snědlo šest koláčů a každý dospělý tři koláče, dohromady snědli 18 koláčů.
b) Petr je nešika. Z každého balení po šesti vejcích jich na cestě polovinu rozbije. Nakonec donesl domů jen 18 vajec.
c) Každé z děvčat nazdobilo 6 vajíček a každý z chlapců, kteří přišli na koledu, od nich dostal tři nazdobená vajíčka. Pro další koledníky ještě zbylo osmnáct nazdobených vajíček.

Možná řešení s metodickým komentářem

Správné řešení je možnost c), přičemž *x* je počet děvčat a *y* je počet chlapců.
Možnost b) to být nemůže, protože obsahuje jen jednu veličinu (balení vajec) a algebraicky se dá popsat jako $x(6 - 3) = 18$, kde *x* je počet balení na začátku.
Situace a) sice obsahuje dvě veličiny, ale správný algebraický popis situace je $6x + 3y = 18$, kde *x* je počet dětí a *y* je počet dospělých.

Úloha je obtížná tím, že žáci nemají algebraický popis situace tvořit, ale naopak mají vymyslet popis situace, kterou rovnost vyjadřuje. Řada žáků 8. a 9. ročníku, kterým byla výše uvedená úloha předložena, se nechala zmást v možnosti a) slovem „snědl“ (tedy mám odečíst). Toto slovo je v zadání úlohy v roli tzv. antisignálu, tedy slova, které odkazuje na jinou operaci, než jaká je nutná pro správné řešení úlohy. Některým žákům pomohla k odhalení chyby výzva, aby situaci v možnosti a) algebraicky zapsali sami. Přitom si chybu uvědomili. Některým žákům pomohlo i názorné zakreslení:



Cesta od situace k zapsání výrazu je pro žáky samozřejmě jednodušší než cesta opačná. Nicméně žáci by měli dostávat i úkoly, v nichž se má tvořit kontext k algebraickému výrazu, protože to přispívá k důkladnému pochopení významu algebraických výrazů.

Očekávaný výstup	M-9-1-07 Žák matematizuje jednoduché reálné situace s využitím proměnných; určí hodnotu výrazu, sčítá a násobí mnohočleny, provádí rozklad mnohočlenu na součin pomocí vzorců a vytýkáním

Obrázek 2: Slovní úloha (Vondrová, Nováková, 2015 s. 34)

2.2 Transmisivní a konstruktivistické pojetí výuky

> Pedagogický konstruktivismus se někdy vymezuje jako snaha o překonání transmisivního vyučování, jež je chápáno jako předávání definitivních vzdělávacích obsahů žákům, kteří jsou při tom odsouzeni do pasivní role jejich příjemců. (Kalhous, Obst, a kol., 2002, s. 49)

Transmisivní vyučování bývá také označováno jako tradiční (klasické) vyučování, které je soustředěno na učební osnovy a obsah vyučování a dominantní úlohu v něm hraje učitel.

Žák a jeho zvládání učiva, jeho motivy a potíže zůstávají v pozadí, neboť při tradičním vyučování se učitel snaží splnit učební osnovy a nemá moc času na to, aby se věnoval potřebám žáků, jejich motivům a potížím“

(Pecina, Zormanová, 2009, s. 17)

Důsledkem transmisivního vyučování mohou žákům chybět širší souvislosti a propojení jednotlivých znalostí.

Konstruktivistické teorie se snaží překonat nevýhody transmisivního vyučování tím, že jsou založeny na porozumění tomu, jak se žáci učí. Důležitým znakem pedagogického konstruktivismu je práce s prekoncepty, což jsou dosavadní žákovy představy. Tyto představy ovlivňují jeho další vnímání, porozumění novým informacím, a tedy i učení (Bertrand, 1998). Konstruktivismus je směr učení, který je založen na aktivním přístupu žáka.

Nejznámějšími představiteli konstruktivistického vyučování matematiky jsou M. Hejný a F. Kuřina. Přetvořili obecný konstruktivistický přístup s ohledem na specifika vyučování matematiky a zformulovali tzv. desatero konstruktivismu (2015, s.194):

1. Aktivita – matematika je chápána jako specifická lidská aktivita, nejen jako její výsledek.
2. Řešení úloh – podstatnou složkou matematické aktivity je hledání souvislostí, řešení úloh a problémů, tvorba pojmů, zobecňování tvrzení a jejich dokazování.
3. Konstrukce poznatků – poznatky jsou nepřenosné, vznikají v mysli poznávajícího člověka.
4. Zkušenosti – žák si přináší zkušenosti z kontaktu s realitou svého života, měl by mít i dostatek příležitostí nabývat zkušenosti ve škole.
5. Podnětné prostředí – základem matematického vzdělávání je vytváření prostředí podněcujícího tvořivost.
6. Interakce – k rozvoji konstrukce poznatků přispívá sociální interakce ve třídě.
7. Reprezentace a strukturování – pro konstruktivistický přístup je charakteristické použití různých druhů reprezentace a strukturální budování matematického světa.
8. Komunikace – značný význam má komunikace ve třídě a pěstování různých jazyků matematiky.
9. Vzdělávací proces – vzdělávací proces je nutno hodnotit minimálně ze tří hledisek: porozumění matematice, zvládnutí matematického řemesla, aplikace matematiky.
10. Formální poznání – poznání založené na ukládání informací do paměti umožňuje jejich reprodukci (u zkoušky), následně dochází k zapomenutí, jde o formální poznání.

Vyučování založené na konstruktivistických přístupech označuje Vondrová (2014) termínem podnětná výuka, ve stejném smyslu bude tento pojem využíván i v této práci.

2.3 Výuka výrazů s proměnnou

Propedeutika výrazů s proměnnou začíná již při výuce matematiky v 1. ročníku základní školy, kde žáci začínají počítat s přirozenými čísly. V dalších ročnících prvního stupně se dále seznamují s čísly celými a racionálními, své vědomosti pak dále prohlubují na druhém stupni. Cílem je žáky naučit porovnávat, zaokrouhlovat, sčítat, odčítat, násobit a dělit čísla v různých číselných oborech.

Do propedeutiky algebraických výrazů také patří úlohy, které vedou k zobecňování, dále sem patří vzorce z geometrie (obvody a obsahy rovinných obrazců, povrchy a objemy těles).

2.3.1 Tři pilíře algebry

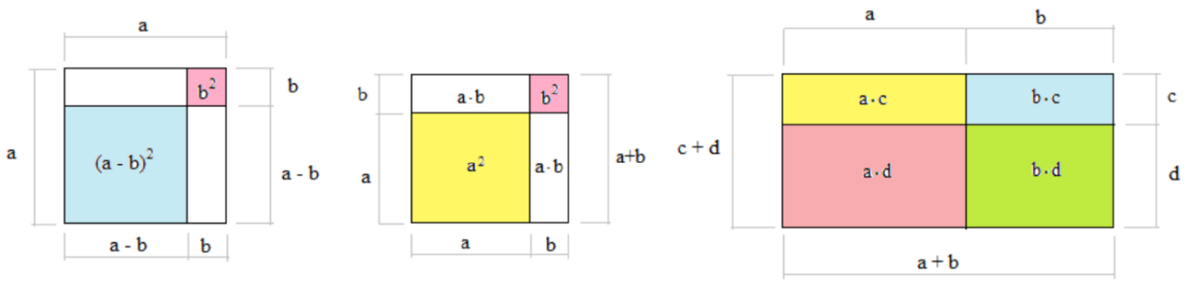
Jak uvádí Vondrová (2015, s. 26) v Metodických komentářích ke Standardům pro základní vzdělávání, spočívá problematika proměnné a algebraických výrazů na třech pilířích.

První pilíř – číselné výrazy a aritmetika

Prvním pilířem jsou číselné výrazy a jejich aritmetika. Aritmetika a algebra mají mnoho společného, ale zároveň se odlišují. V aritmetice při úpravách číselných výrazů užíváme prioritu početních operací, u algebraických výrazů to ale nestačí. Porovnáme-li úpravu číselného výrazu a algebraického výrazu na příkladu, vidíme rozdíl. U číselného výrazu 3(10 + 6) žák nejprve sečte čísla v závorce a pak výsledek vynásobí třemi, u algebraického výrazu $3(x + 6)$ může jen násobit, resp. závorku roznásobí číslem 3. Zatímco v aritmetice žák dojde ke konkrétnímu výsledku – určitému číslu, v algebře je výsledkem výraz $3x + 18$, který už dále nelze upravit, pokud nedosadíme za x konkrétní číslo. Toto je pro žáky nové a těžko uchopitelné, proto patří úpravy algebraických výrazů mezi nejobtížnější, s čím se na základní škole žáci setkávají.

Druhý pilíř – geometrie

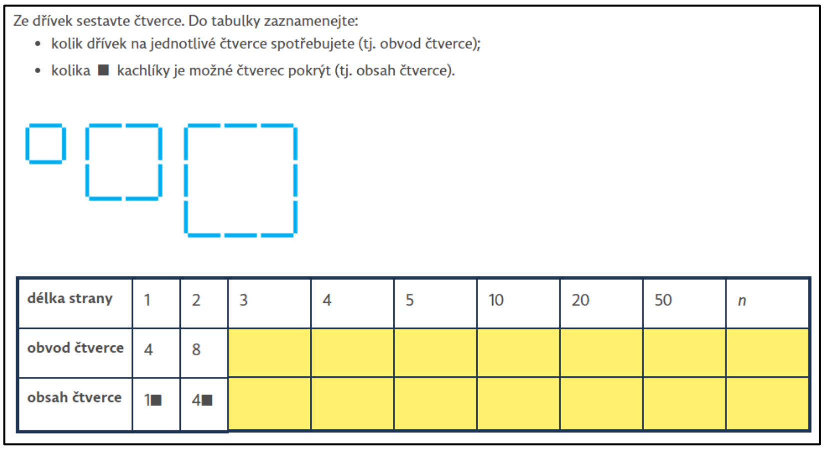
Druhým pilířem algebry je geometrie, resp. souvislost mezi obrazci a vzorci pro obsah, obvod apod. Žáci znají vzorec pro obsah čtverce, který má tvar $S = a^2$, a z geometrie vědí, že proměnná a může nabývat různých hodnot. Podobně to je i s obsahem obdélníku, který je žákům dobře znám. Tyto znalosti lze u žáků využít a názorně jim ukázat některé algebraické výrazy a vzorce na geometrických objektech. Na obrázku 5 je příklad znázornění algebraických vzorců $(a+b)^2$, $(a-b)^2$ a násobení dvou mnohočlenů $(a+b)(c+d)$.



Obrázek 3: Geometrické vyjádření výrazů

Třetí pilíř – úlohy na zobecňování

Třetím pilířem algebry jsou úlohy na zobecňování. To jsou úlohy, ve kterých je zadáno několik prvních členů číselné řady a žáci mají za úkol najít další členy, až nakonec dojdou k obecnému vyjádření libovolného členu. Žáci přijímají písmeno v roli proměnné v těchto úlohách zcela přirozeně. Někteří žáci používají proměnnou velmi rychle, jiní potřebují delší řadu čísel k uvědomění si souvislostí a následném použití proměnné. Zde je důležitý citlivý přístup učitele. Je vhodné, aby každý žák cítil potřebu použít písmeno místo čísla.



Ze dřívek sestavte čtverce. Do tabulky zaznamenejte:

- kolik dřívek na jednotlivé čtverce spotřebujete (tj. obvod čtverce);
- kolika ■ kachlíky je možné čtverec pokrýt (tj. obsah čtverce).

délka strany	1	2	3	4	5	10	20	50	*n*
obvod čtverce	4	8							
obsah čtverce	1■	4■							

Obrázek 4: Příklad z pracovního sešitu A učebnic nakl. H-mat (Hejný, Eichlerová, Šalom, 2016, s. 25)

2.3.2 Úvod do výuky

Prvním krokem při plánování výuky je najít způsob, jak dosáhnout cílů a předepsaných výstupů, které jsou popsány v kurikulárních dokumentech. V knize *Teória vyučovanie matematiky 2* Hejný a kol. (1990) rozdělují práci s algebraickými výrazy do tří hladin. Nejnižší hladinou je *modelování*, kde slovní vyjádření nahrazujeme symboly. Vyšší hladinou je *standardní manipulace* se symboly, což je úprava algebraických výrazů podle dobře známých pravidel. Nejvyšší hladinou je *strategická manipulace* se symboly, což je úprava, při které nestačí znalost nacvičených postupů, ale je potřeba objevit myšlenku – strategii postupu, která vede k cíli. Vzhledem k tomu, že se diplomová práce zabývá výrazy s proměnnou na úrovni druhého stupně základní školy, bude dále podrobněji zkoumána pouze hladina modelování a hladina standardní manipulace.

Modelování

Tato hladina je z hlediska jazyka algebry nejdůležitější. Slovní vyjádření je v této hladině nahrazováno symbolickým vyjádřením. Modelování se používá při řešení slovních úloh, rovnic, při zjišťování obsahů a objemů v geometrii apod. S pomocí symbolů se žáci postupně učí zapisovat problém do matematického jazyka a tento jazyk využívat.

Už na prvním stupni základní školy se využívají jako symboly prázdné obdélníky či obrázky nebo počáteční písmena slov např. počet dveří v domě označíme d a počet oken o. V geometrii při výpočtu např. obvodu čtverce žáci, po vyřešení mnoha úloh s konkrétními rozměry čtverců, sami docházejí k tomu, že když si délku strany označí obecně a, pak obvod čtverce lze zapsat $o = a + a + a + a$, resp. $o = 4 \cdot a$. Algebraický zápis se tak stane zobecněním číselného výrazu. Pro žáky se pak tento algebraický zápis stane vzorcem, který mohou používat pro výpočet obvodu čtverce, pokud znají délku jeho strany. Zpětně vyčíslují hodnotu algebraického výrazu.

Učitel v této hladině získává prostor k podnětné výuce. Úlohy využívající principů podnětné výuky mají žáka motivovat k vlastnímu poznávání matematiky a řešení těchto úloh má vést ke konstrukci nového matematického poznání. Podnětným prostředím může být problém, projekt nebo série úloh (Stehlíková, 2007, s. 20). Při využití těchto principů mohou žáci objevovat základní principy algebraického myšlení a výhody symbolického zápisu ke zjednodušení popisu řešení.

Standardní manipulace

Standardní manipulace se symboly je úprava algebraických výrazů podle známých pravidel. Jedná se o sčítání a odčítání, což je manipulace s jednočleny a mnohočleny, která je žákům známá již z aritmetického prostředí. U násobení výrazů ale platí jiná pravidla než v aritmetice. Při násobení závorky jednočlenem nebo mnohočlenem používáme tzv. roznásobování závorky. Zpětně můžeme mnohočlen upravit na součin. Při této úpravě můžeme použít vytýkání před závorku. Dále se žáci seznamují s druhou mocninu dvojčlenu, kde pro zrychlení úprav používají vzorec.

Příklady standardní manipulace (Odvárko, Kadleček, 1999)

Sčítání a odčítání	$5a + 6a = 11a$
	$2x + 3y - 3x - 5y = -x - 2y$
Násobení	$(a + 3) \cdot 2 = 2a + 6$
	$(t + 1) \cdot (t - 3) = t^2 - 2t - 3$
Rozklad na součin	$4a + 8b = 4 \cdot (a + 2b)$
	$ab + ac + bc + b^2 = (a + b) \cdot (b + c)$
Druhá mocnina dvojčlenu	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

„Dobrá znalost standardní manipulace je nevyhnutelným předpokladem dalšího úspěšného vzdělávání v matematice“ (Hejný a kol., 1990, s. 146). Žáci by tedy měli vyřešit mnoho úloh, aby si byli jisti v úpravách výrazů a mohli je používat při řešení úloh.

2.3.3 Chyby při úpravách výrazů s proměnnou

Chyby jsou přirozenou součástí učení, patří tedy i do matematiky, a tudíž i do úprav výrazů. Jak uvádí Hejný (2004, s. 63): „Chyba hraje v životě žáka důležitou, někdy dokonce osudovou roli. V naší škole je chyba často vnímána jako jev nežádoucí, jako něco, čeho je nutno se vystříhat, jako něco, čeho se bojí nejen žáci, ale i učitelé.“ Snahou by mělo být chyby odhalit, najít jejich příčinu a navrhnout řešení, jak chybě předejít.

Hejný (1990, s. 155) předkládá sedm druhů chyb při úpravách výrazů:

1. **Numerické chyby**

Numerickou chybou lze rozumět chybu při aritmetickém počítání. Jedná se tedy o chybu způsobenou nedostatečnou automatizací početních úkonů. Žák, který se soustředí na náročnější úkon s algebraickým výrazem, nevěnuje dostatečný prostor jednoduchému početnímu úkonu.

Příklad numerické chyby:

$$6(x + 2) = 6x + 14$$

2. **Úkonové chyby**

Do této skupiny chyb lze zařadit takové chyby, které žák provede na základě neznalosti správného úkonu. Může se jednat o chybu špatného roznásobení nebo umocnění závorky nebo také o neznalosti vlivu záporného znaménka před závorkou.

Příklad úkonové chyby:

$$(4 + b)^2 = 4^2 + b^2$$

$$12 - (5 + x) = 12 - 5 + x$$

3. **Grafické chyby**

Grafické chyby vznikají nedbalým zápisem, škrtáním, přepisováním nebo zasahováním zápisu do jiného zápisu.

4. **Chyby velkých skoků**

Žák se dopustí chyby ve snaze udělat úpravu zahrnující více kroků naráz.

Příklad této chyby:

$$\frac{x+2}{2x-1} - \frac{3-x}{x+4} = \frac{x^2+6x+4+2x^2-5x+3}{(2x-1)(x+4)}$$

5. **Strategické chyby**

Strategickou chybou rozumíme chybu při strategii úpravy výrazů, kdy žák zvolí špatný postup a dostane se do situace, v níž nelze dále pokračovat ke zdárnému konci.

Příklad strategické chyby při rozkladu na součin:

$$a^2 - 4a - b^2 + 4 = (a - b) \cdot (a + b) - 4(a - 1)$$

6. Bezradnosti a bloudění

Tato kategorie není chybou v pravém slova smyslu, ale pouze ztráta orientace, neschopnost najít cestu k řešení. Příčinou je zpravidla nedostatečné porozumění problematice.

7. Jiné chyby

Sem Hejný řadí chyby, které nepatří do žádné z uvedených kategorií. Jsou to chyby, které jsou způsobeny například roztržitostí nebo přehlédnutím a následným vynecháním některého členu výrazu atd.

3 Analýza učebnic z hlediska úprav algebraických výrazů

Výběr vhodné učebnice může být pro výuku zásadní. Učiteli pomůže s výběrem obsahu učiva a v některých případech i s možným didaktickým řešením, jak žáky s tímto učivem seznámit. Nabízí řadu úloh, cvičení a aktivit, z čehož vyplývá, že učebnice mají velký vliv na průběh hodin matematiky.

Jak již bylo řečeno, s číselnými výrazy i s výrazy s proměnnou se žáci seznamují již na prvním stupni. V této práci se zaměřím hlavně na učebnice pro 8. ročník ZŠ a odpovídajícího ročníku víceletých gymnázií, konkrétně na kapitoly věnované výrazům s proměnnou. Snažila jsem se obsáhnout v dnešní době nejpoužívanější učebnice, a to od nakladatelství Fraus, Prometheus, SPN, Fortuna a Nová škola. V nich jsem se zaměřila na zavedení pojmu proměnná a výrazů s proměnnou, budování tohoto pojmu, na manipulaci s výrazy a porovnání přístupů jednotlivých autorů při úpravě výrazů. V učebnicích jsem také sledovala, zda se v nich objevují tři hladiny práce s výrazy podle Hejného.

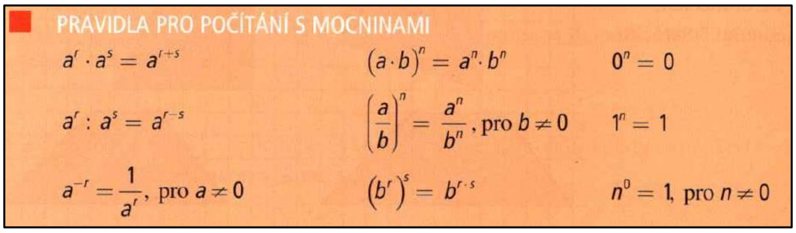
3.1.1 Matematika FRAUS (H. Binterová, E. Fuchs, P. Tlustý)

Učebnice je určena pro základní školy a odpovídající ročník víceletých gymnázií. Obsahuje kapitoly Mocniny a odmocniny, Výrazy, Rovnice, Procenta, úroky a statistika, A ještě něco navíc (rozšiřující úlohy).

Každá kapitola je uvedena motivačními úlohami a příklady, které jsou doplněny obrázky. Následuje rámeček s vysvětlením „Jak na to?“, kde autoři uvádějí postup řešení. Následují úlohy, které jsou zakončeny rámečkem „slovníček“, ve kterém jsou shrnuta pravidla pro řešení a použitá terminologie. Další z použitých rámečků je „Zapamatujme si“, kde jsou uvedeny méně používané postupy nebo rady vedoucí ke zrychlení výpočtu nebo upozornění na možné chyby. Úlohy a úkoly v celé učebnici jsou svým obsahem propojeny s jinými předměty a s reálnými situacemi.

Zavedení proměnné, výrazů s proměnnou

Žáci pracovali s proměnnými již v kapitole Mocniny a odmocniny. Proměnná zde nahrazuje čísla v úvodu tabulek a ve vzorcích. Použitím výrazů ve formě vzorců jsou ukázána obecná pravidla pro počítání s mocninami v číselných výrazech (obr. 7).


PRAVIDLA PRO POČÍTÁNÍ S MOCNINAMI

$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ $\quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ $\quad 0^n = 0$

$a^r : a^s = a^{r-s}$ $\quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, pro $b \neq 0$ $\quad 1^n = 1$

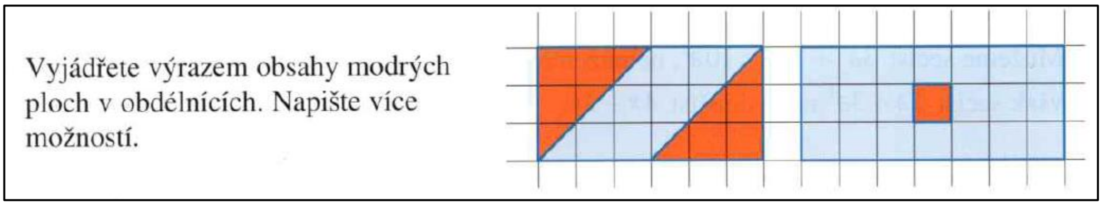
$a^{-r} = \frac{1}{a^r}$, pro $a \neq 0$ $\quad (b^r)^s = b^{r \cdot s}$ $\quad n^0 = 1$, pro $n \neq 0$

Obrázek 5: Použití výrazů v kapitole mocniny (s. 47)

V kapitole Výrazy je na začátku vysvětlen pojem výraz pomocí známých příkladů – např. pomocí součtu a rozdílu délek úseček či pomocí obsahu čtverce. Začíná se s číselnými výrazy, s nimiž již žáci mají zkušenosti. Po nich jsou zařazeny úlohy, ve kterých se vyskytují výrazy s proměnnými. Výraz s proměnnou je uveden jako výraz, ve kterém se vyskytuje proměnná (např. písmena *x, y, a, b*).

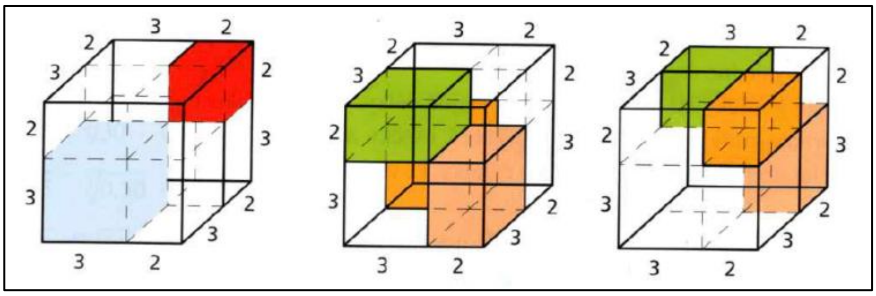
Modelování

Učebnice bohatě využívá geometrie k vizuální představě výrazu s proměnnou, a to na určení obsahu geometrických útvarů, ať už jednoduchých, členitých či jen jejich částí (obr. 8).



Obrázek 6: Určování obsahu (s. 59)

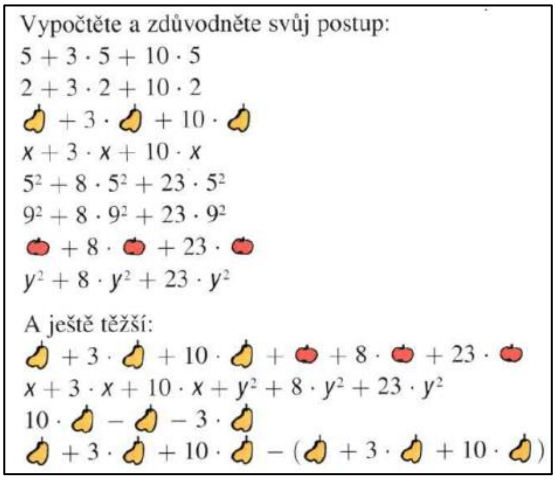
Tato učebnice využívá i názorné obrázky k určování objemu části krychle, které mohou žáky dovést k zajímavým souvislostem (obr. 9).



Obrázek 7: Části krychle (s. 52)

Standardní manipulace

Autoři při představení úprav výrazů s proměnnou vycházejí z číselných výrazů. Ukazují zde podobnost mezi výpočtem číselného výrazu a úpravou výrazu s proměnnou. Ukázka je doplněna obrázky jablek a hrušek, které symbolicky zastupují proměnnou (obr. 10).



Obrázek 8: Jablka a hrušky (s. 59)

Standardní manipulace se doplňují s hladinou modelování. Střídají se úlohy, které slouží k procvičování úprav, s úlohami praktickými z reálného života nebo z geometrie.

Shrnutí

V této učebnici je pestrá směs úloh. Jsou zde úlohy geometrické, využívající již získané znalosti žáků. Dále pak úlohy z reálného života, u kterých by při jejich řešení měli žáci mít potřebu použít matematický zápis. A v neposlední řadě jsou zde úlohy k procvičování úprav. Spolu s využitím pracovního sešitu je v učebnici dostatek úloh k procvičení, včetně úloh podnětných. Nevýhodou je, že úlohy nemají gradovanou obtížnost. Často jsou v počátečních úlohách, které by měly mít nejnižší obtížnost, použita „obtížná čísla“, což může slabší žáky odradit (např. „Výraz upravte na součin $-225x^2 + 180xy + 36y^2$“).

3.1.2 Matematika PROMETHEUS (O. Odvárko, J. Kadleček)

Tato učebnice je dělena do tří témat: Mocniny a odmocniny, Pythagorova věta a Výrazy. Každé téma je členěno na kapitoly, které se dále dělí na podkapitoly. Každá podkapitola začíná motivační úlohou, která je vyřešena. Po ní následuje rámeček s výkladem učiva a úlohy na procvičení. Výrazy s proměnnou najdeme v kapitolách Výrazy a Mnohočleny. Kapitola Výrazy je členěna na podkapitoly Číselné výrazy, Výrazy s proměnnými, Výrazy v matematice i v životě. Kapitola Mnohočleny je rozdělena na podkapitoly Co je to mnohočlen, Sčítání a odčítání mnohočlenů, Násobení mnohočlenů, Rozklad mnohočlenů na součin, Vzorce usnadňující úpravu.

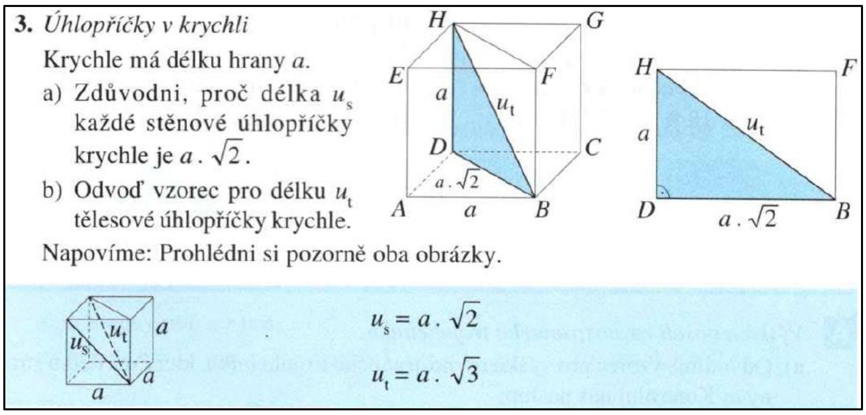
Zavedení proměnné a výrazů s proměnnou

První podkapitola je věnována číselným výrazům a opakování pravidel jejich úprav. Je zde zdůrazněn pojem hodnota výrazu. Přechod od aritmetiky k algebře je na základě budování představy proměnné jako zobecněného čísla.

Modelování

Kapitola Výrazy s proměnnou je uvedena motivační slovní úlohou, ve které žáci sledují sestavení vzorce na výpočet vybrané částky za zájezd v cestovní kanceláři. Jsou zde dvě proměnné, jedna vyjadřuje počet dospělých, druhá počet dětí. Proměnnou autoři představují jako zástupce čísla, což je vidět i v definici pro hodnotu výrazu s proměnnou. Za definicí následují úlohy na výpočet hodnoty výrazů dosazením číselných hodnot do výrazů s proměnnou a úlohy, ve kterých mají žáci zapsat slovní zadání úloh matematickým zápisem pomocí výrazu s proměnnou.

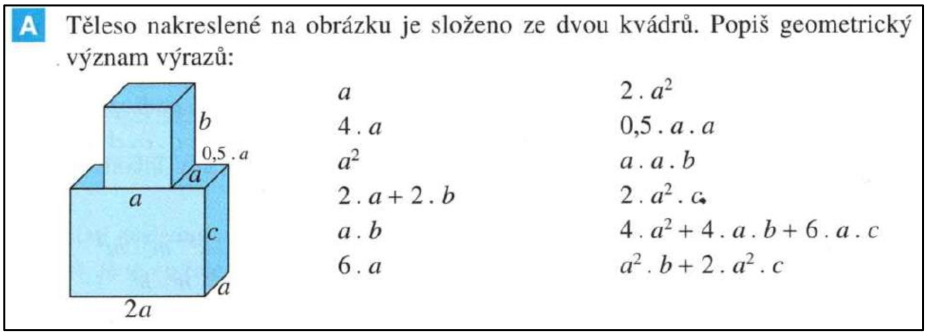
Použití výrazů autoři ukazují v kapitole Výrazy v matematice i v životě na zjednodušení matematických vzorců za využití Pythagorovy věty (obr. 11) a na sestavení vzorce pro zjednodušení výpočtu daně. Tuto kapitolu bych označila za informativní, jak můžeme s výrazy pracovat. Žáci se teprve s výrazy seznamují, tudíž obě odvození mohou být pro žáky velmi náročná.



Obrázek 9: Odvození vztahu pro výpočet délky tělesové úhlopříčky (s. 62)

Standardní manipulace

Kapitola Mnohočleny má na začátku motivační úlohu, ve které mají žáci popsat geometrický význam výrazů s proměnnou na základě obrázku složeného tělesa (obr. 12).

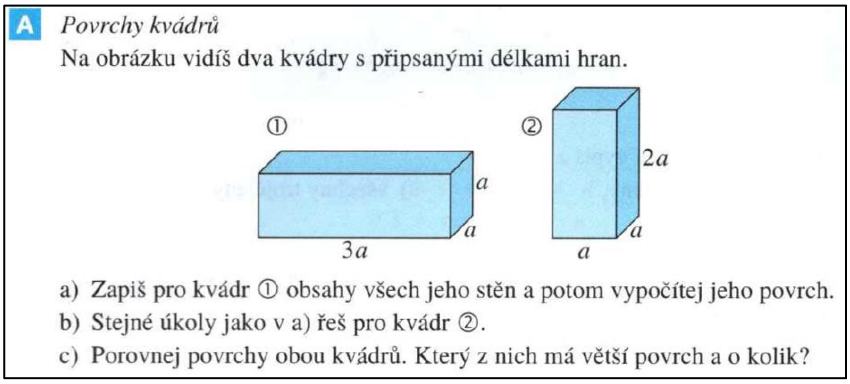


A Těleso nakreslené na obrázku je složeno ze dvou kvádrů. Popiš geometrický význam výrazů:

a	$2 . a^2$
$4 . a$	$0{,}5 . a . a$
a^2	$a . a . b$
$2 . a + 2 . b$	$2 . a^2 . c$
$a . b$	$4 . a^2 + 4 . a . b + 6 . a . c$
$6 . a$	$a^2 . b + 2 . a^2 . c$

Obrázek 10: Motivační úloha (s. 65)

Autoři definují pojmy jednočlen a mnohočlen a vedou žáky ke stručnému zápisu. Sčítání a odčítání mnohočlenů uvádějí opět geometrickou úlohou jako v kapitole Mnohočleny. Úloha tentokrát není řešena (obr. 13).



A *Povrchy kvádrů*

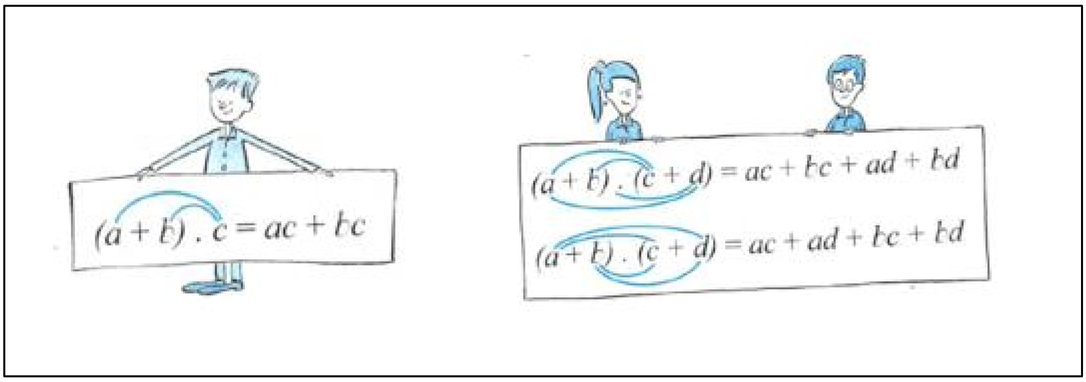
Na obrázku vidíš dva kvádry s připsanými délkami hran.

a) Zapiš pro kvádr ① obsahy všech jeho stěn a potom vypočítej jeho povrch.
b) Stejné úkoly jako v a) řeš pro kvádr ②.
c) Porovnej povrchy obou kvádrů. Který z nich má větší povrch a o kolik?

Obrázek 11: Úloha na sčítání a odčítání mnohočlenů (s. 68)

Postup při sčítání a odčítání mnohočlenů je opět v modrém rámečku, doplněný o větu: „Nelze sčítat jablka s hruškami."

Autoři zavádějí násobení mnohočlenu jednočlenem a násobení dvou mnohočlenů symbolickým způsobem. Řešený příklad je doplněn čarami, které názorně ukazují postup. Pro připomenutí je tento postup uveden i v rámečku (obr. 14). Úlohy, které následují, mají stupňující se náročnost.



Obrázek 12: Symbolické znázornění postupu násobení mnohočlenů (s. 73, 74)

Rozklad mnohočlenu na součin je uveden pomocí vytýkání před závorku. Řešeným příkladem jsou uvedeny vzorce usnadňující úpravu výrazu.

Shrnutí

Při budování pojmu proměnná autoři vycházejí z číselných výrazů. Nové učivo je pokaždé uvedeno motivační úlohou, po které následuje modrý rámeček se shrnutím nových poznatků. Úlohy na procvičení mají stupňující se náročnost. Výhodou této učebnice je množství obrázků a schémat naznačujících postup. Některé úpravy jsou prezentovány na výpočtech obvodů a obsahů geometrických útvarů, což může přispět k lepšímu pochopení úprav.

3.1.3 Matematika PROMETHEUS (J. Herman a kol.)

Učebnice je určena pro žáky víceletých gymnázií a je rozdělena na dva díly. První díl obsahuje kapitoly Mocniny a odmocniny, Pythagorova věta, Číselné výrazy, Výrazy s proměnnými, Sčítání a odčítání mnohočlenů a Dělení mnohočlenů jednočleny. Ve druhém díle následují kapitoly Mnohočleny, Dělení mnohočlenů, Umocňování mnohočlenů, Rozklad na součin, Lomené výrazy, Sčítání a odčítání lomených výrazů a Násobení a dělení lomených výrazů. Učebnice mají tradiční koncepci jednotlivých kapitol. Nejprve je na řešených příkladech vysvětleno, jak postupovat při řešení úloh. Za touto úlohou je rámeček, ve kterém je shrnuta teorie. Následují úlohy na procvičení se stupňující se obtížností.

Zavedení proměnné, výrazů s proměnnou

V této učebnici se žáci setkají s pojmem proměnná v 1. díle. Výraz s proměnnou je definován jako číselný výraz, ve kterém je některé konkrétní číslo nahrazeno písmenem, třeba i na několika místech. Následuje vysvětlení dosazení za proměnnou a zjištění hodnoty výrazu. Používání výrazu s proměnnou je ukázáno na příkladu přepisu slovního zadání matematickými symboly. Následuje řada slovních výrazů, které má žák nahradit algebraickým zápisem.

Modelování

Písmeno je zde definováno jako proměnná bez dalšího vysvětlování či vytvoření konkrétní představy. Podobně je definicí zaveden i pojem mnohočlen.

Standardní manipulace

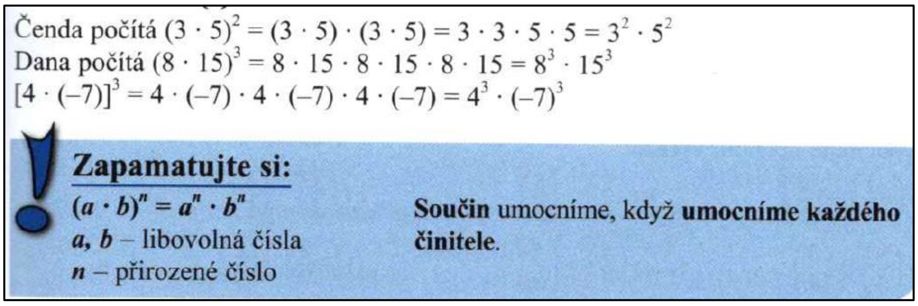
Každá kapitola vysvětlující manipulaci s výrazy s proměnnou v obou dílech učebnic je uvedena řešením několika příkladů. Za nimi následuje teoretické vysvětlení a řada úloh na procvičení se stupňující se obtížností. Obtížnost odpovídá úrovni nižších ročníků gymnázií, kterým je určena. V učebnici je řada pouček a konkrétních vysvětlení, jak úpravu provádíme. Autoři používají příklady řešení různých žáků. Jejich prostřednictvím nabízejí žákům různé způsoby řešení nebo poukazují na chyby, ke kterým může při úpravách dojít.

3.1.4 Matematika SPN (Půlpán a kol.)

Tato učebnice je rozčleněna na kapitoly Druhá mocnina a odmocnina, Pythagorova věta a její užití, Mocnina s přirozeným mocnitelem, Výrazy, Lineární rovnice, Základy statistiky a Pravděpodobnost. Kapitola Výrazy, která nás zajímá, se dále dělí na Výrazy s čísly, Výrazy s proměnnými a Mnohočleny. Tyto podkapitoly jsou dále členěny.

Zavedení proměnné a výrazů s proměnnou

Žáci si nejprve zopakují práci s číselnými výrazy a na ně plynule navazují výrazy s proměnnou. Proměnná od počátku vystupuje jako symbol nahrazující číslo. S tímto významem se žáci již setkali např. v kapitole Mocniny.


Čenda počítá $(3 \cdot 5)^2 = (3 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 5) = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 3^2 \cdot 5^2$

Dana počítá $(8 \cdot 15)^3 = 8 \cdot 15 \cdot 8 \cdot 15 \cdot 8 \cdot 15 = 8^3 \cdot 15^3$

$[4 \cdot (-7)]^3 = 4 \cdot (-7) \cdot 4 \cdot (-7) \cdot 4 \cdot (-7) = 4^3 \cdot (-7)^3$

Zapamatujte si:

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

a, b – libovolná čísla

n – přirozené číslo

Součin umocníme, když **umocníme každého činitele**.

Obrázek 13: Zobecňování úprav s číselnými výrazy (s. 49)

Modelování

Jednotlivé podkapitoly jsou uvedeny příklady, které jsou podrobně řešeny a komentovány. V následujících řešených příkladech autoři prostřednictvím úprav číselných výrazů upozorňují na to, co mají společného, což následně zapisují pomocí písmen, tedy vzorce, jehož znalost umožňuje zrychlit úpravu výrazů (viz obr. 15). Autoři uvádějí řadu konkrétních příkladů z geometrie a z fyziky.

Standardní manipulace

Manipulace s výrazy je ukázána na řešených příkladech se stupňující se obtížností, za kterými následují úlohy na procvičení. Text je proložen několika typy rámečků. V rámečku „Zopakujte si“ je opakování např. manipulace s mocninami. V rámečku „Zapamatujte si“ je shrnutí nové látky. V rámečku „Všimněte si“ jsou různé postřehy, zkratky usnadňující úpravy. Poslední typ rámečku má evokovat list vytržený z bloku, na němž jsou uvedeny zajímavosti.

3.1.5 Matematika FORTUNA (J. Coufalová a kol.)

Tato učebnice je rozčleněna na kapitoly Druhá mocnina a odmocnina, Pythagorova věta, Mocniny s přirozeným mocnitelem, Kruh, kružnice, Výrazy, Válec, Lineární rovnice, Konstrukční úlohy a Statistika. Kapitola Výrazy, která nás zajímá, se dále dělí na Číselné výrazy, Výrazy s proměnnými, Sčítání a odčítání výrazů, Násobení a dělení mnohočlenů jednočlenem, Násobení mnohočlenů mnohočlenem a Vzorce pro úpravu výrazů.

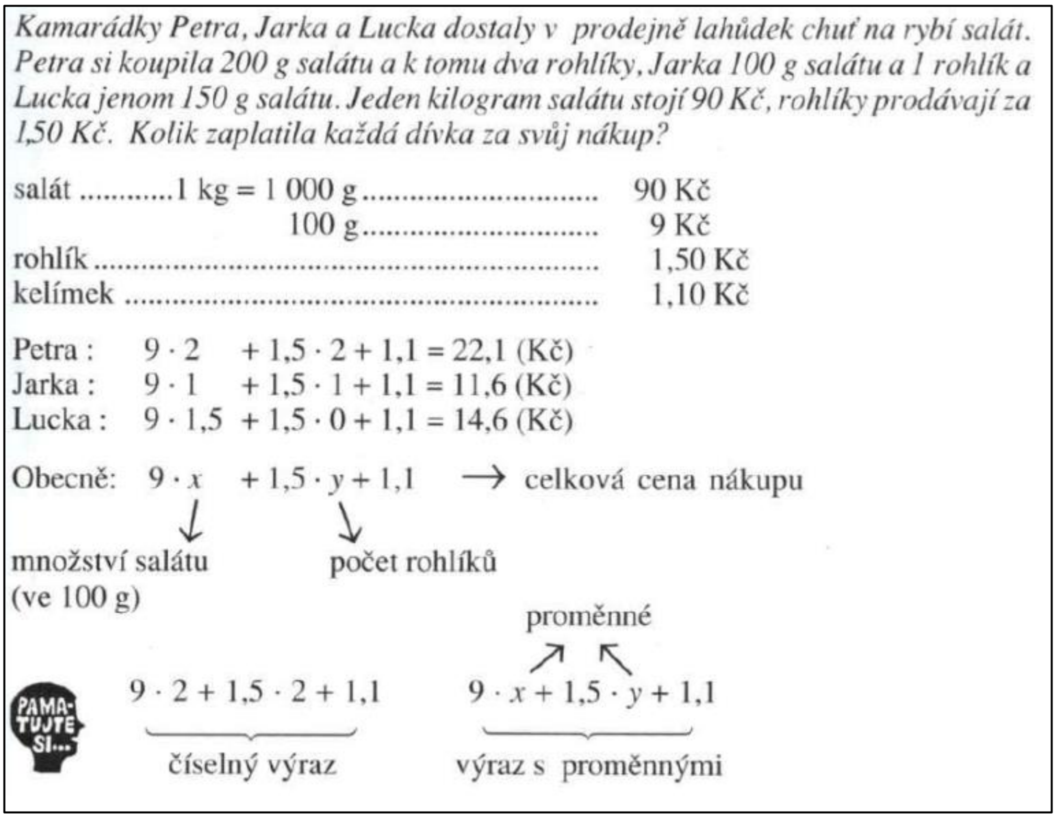
Zavedení proměnné a výrazů s proměnnou

První podkapitolou jsou Číselné výrazy. V ní si žáci zopakují pravidla pro úpravu číselných výrazů a na ně plynule naváží výrazy s proměnnou. Je zde zdůrazněn pojem hodnota výrazu. Přechod od aritmetiky k algebře je na základě budování představy proměnné jako zobecněného čísla.

Modelování

Kapitola Výrazy s proměnnými je uvedena motivační slovní úlohou z reálného života, ve které žáci sledují sestavení vzorce na výpočet celkové ceny nákupu (viz obr. 16). Jsou zde dvě proměnné, jedna vyjadřuje počet rohlíků, druhá množství zakoupeného salámu. Proměnnou zde autoři představují jako zástupce čísla, což je vidět i v definici pro hodnotu výrazu s proměnnou.

Za definicí následují úlohy na výpočet hodnoty výrazů dosazením číselných hodnot do výrazů s proměnnou a úlohy, ve kterých mají žáci za úkol zapsat slovní zadání výrazů matematickým zápisem pomocí výrazu s proměnnou.



Kamarádky Petra, Jarka a Lucka dostaly v prodejně lahůdek chuť na rybí salát. Petra si koupila 200 g salátu a k tomu dva rohlíky, Jarka 100 g salátu a 1 rohlík a Lucka jenom 150 g salátu. Jeden kilogram salátu stojí 90 Kč, rohlíky prodávají za 1,50 Kč. Kolik zaplatila každá dívka za svůj nákup?

salát ....1 kg = 1 000 g............................ 90 Kč
100 g............................ 9 Kč
rohlík .... 1,50 Kč
kelímek .... 1,10 Kč

Petra : $9 \cdot 2 + 1{,}5 \cdot 2 + 1{,}1 = 22{,}1$ (Kč)
Jarka : $9 \cdot 1 + 1{,}5 \cdot 1 + 1{,}1 = 11{,}6$ (Kč)
Lucka : $9 \cdot 1{,}5 + 1{,}5 \cdot 0 + 1{,}1 = 14{,}6$ (Kč)

Obecně: $9 \cdot x + 1{,}5 \cdot y + 1{,}1 \longrightarrow$ celková cena nákupu

množství salátu (ve 100 g)   počet rohlíků

proměnné

PAMATUJTE SI...

$\underbrace{9 \cdot 2 + 1{,}5 \cdot 2 + 1{,}1}_{\text{číselný výraz}}$ $\underbrace{9 \cdot x + 1{,}5 \cdot y + 1{,}1}_{\text{výraz s proměnnými}}$

Obrázek 14: Motivační úloha (s. 101)

Standardní manipulace

Manipulace s výrazy je ukázána na řešených příkladech, u kterých je i slovní popis postupu. Postupy a shrnutí znalostí jsou zapisovány v tabulce (viz obr. 17). Hlavně slabším žákům může tento postup pomoci při samostatné práci. Následující úlohy na procvičení mají stupňující se obtížnost. Na závěr jsou uvedeny úlohy z reálného života.

Postup	Příklad
a) **Sčítání a odčítání jednočlenů** Sčítat a odčítat můžeme jednočleny, které mají stejnou proměnnou ve stejné mocnině. ■ Sečteme (odečteme) koeficienty. ■ Mocninu proměnné opíšeme.	$2a^2 + 5a^2 = 7a^2$ $1{,}4\,p - 0{,}8\,p = 0{,}6\,p$ $5x^2 + 3x^3$ nemůžeme sečíst $4a^2 + 3x^2$ nemůžeme sečíst
b) **Sčítání mnohočlenů** ■ Odstraníme závorky. ■ Jednočleny sečteme nebo odečteme.	$(3x + 2) + (5 - 2x) =$ $= 3x + 2 + 5 - 2x =$ $= 3x - 2x + 2 + 5 = x + 7$
c) **Odčítání mnohočlenů** ■ Přičteme opačný mnohočlen. ■ Změníme znaménka všech jednočlenů v závorce. ■ Získaný výraz přičteme.	$(3x + 2) - (5 - 2x) =$ $= (3x + 2) + (-5 + 2x) =$ $= 3x + 2 - 5 + 2x =$ $= 5x - 3$

Obrázek 15: Zápis postupu v tabulce (s. 105)

3.1.6 Matematika NOVÁ ŠKOLA (M. Jedličková a kol.)

Téma výrazy spolu s rovnicemi je ve dvou učebnicích. Kapitoly v první učebnici se nazývají Někdy násobíme stejné činitele (Mocnina), S mocninami musíme počítat (Přednost operací, pravidla pro počítání s mocninami), Které číslo máme umocnit, abychom dostali očekávaný výsledek? (Odmocniny), I pro počítání s odmocninami platí pravidla (Pravidla pro počítání s odmocninami), Některé jednotky obsahují mocninu (Převody jednotek obsahu a objemu), Začneme počítat s písmeny (Výraz, proměnná), Proměnnou můžeme umocnit (Mnohočleny), Které číslo hledáme? (Rovnice), K čemu nám rovnice poslouží? (Slovní úlohy). Druhá učebnice navazuje na první. Obsahuje tyto kapitoly: Vraťme se k počítání s výrazy (Vytýkání), Roznásobování může souviset s mocninami (Vzorce), Pomocí rovnic řešíme slovní úlohy, Jedna neznámá mnohdy nestačí (Soustavy rovnic), Zabývejme se dalšími slovními úlohami.

Zavedení proměnné a výrazů s proměnnou

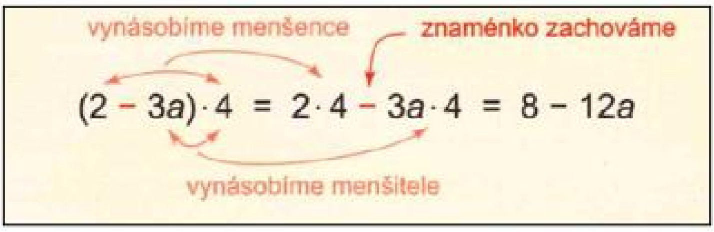
Motivační úloha na úvod byla vybrána z fyziky. Ukazuje, že už se žáci s nahrazováním čísel písmeny a naopak setkali. Proměnná je zavedena jako písmeno ve významu čísla a výraz jako zápis matematických výpočtů.

Modelování

Jednotlivé podkapitoly jsou uvedeny řešenými příklady, spolu s řešením je uvedeno i podrobné vysvětlení problému, případně schematicky naznačen postup. Následují další řešené příklady, po nich pak úlohy na procvičení.

Standardní manipulace

Manipulace s výrazy je ukázána na řešených příkladech, u kterých je i slovní popis postupu (obr. 18). Následující úlohy na procvičení mají stupňující se obtížnost.



Obrázek 16: Názorná ukázka úpravy výrazů (s. 42)

Shrnutí analýzy učebnic

Autoři učebnic při zavedení výrazů s proměnnou nejčastěji využívají úpravy číselných výrazů, geometrické vzorce, proměnnou v záhlaví tabulek, číselné výrazy a mocniny. Ve většině učebnic jsou výrazy s proměnnou ukázány jako číselné výrazy, ve kterých se vyskytuje písmeno. Písmena jsou zástupnými symboly za čísla. Umožňují tak vytvořit „vzorec“ v situacích, které se opakují. Například: Do ZOO přicházejí návštěvníci ve skupinách. Vstupenka pro dospělého stojí 150 Kč, vstupenka pro dítě 80 Kč, cena za vstupenky pro skupinu bude $150a + 80b$, kde a je počet dospělých ve skupině a b je počet dětí ve skupině. Podle zadání a konkrétní situace pak lze za písmeno dosadit číslo a zjistit hodnotu číselného výrazu. Některé učebnice využívají geometrickou reprezentaci výrazů, ať už u geometrických útvarů v rovině nebo v prostoru. Pro procvičení jednotlivých standardních manipulací s výrazy s proměnnou jsou v učebnicích využity převážně gradované úlohy. Nejvíce úloh, které bych označila za podnětné, obsahuje učebnice nakladatelství Fraus (Binterová a kol., 2009), podnětné úlohy nalezneme i v učebnicích Prometheus (Odvárko, Kadleček, 1999) a SPN (Půlpán a kol., 2009). Některé učebnice, Nová škola (Jedličková, 2016, 2018) a Fraus (Binterová a kol., 2009), obsahují méně úloh na procvičení. K těmto učebnicím jsou vydány pracovní sešity, které tento nedostatek řeší.

Z pohledu Metodických komentářů ke Standardům pro základní vzdělávání lze v učebnicích najít pouze dva z doporučovaných tří pilířů doporučovaných pro výuku algebraických výrazů. Všechny učebnice využívají pro představení algebraického prostředí žákům číselné výrazy. Některé učebnice využívají pro názornost geometrii – výpočet délek, obvodů a obsahů rovinných geometrických objektů, povrchů a objemů prostorových geometrických objektů. Třetí pilíř zobecňování, který je nedílnou součástí algebry ve vybraných učebnicích chybí.

Tabulka 1: Shrnutí analýzy učebnic – hladina modelování

	Hladina modelování	
	Zavedení proměnné	Význam proměnné
Fraus H. Binterová, E Fuchs, P. Tlustý	∗proměnná je představena v souvislosti s číselnými výrazy ∗poprvé v úvodu tabulek a vzorců pro počítání s mocninami ∗proměnná v geometrii – délka úsečky, obvod a obsah obrazců	∗zápis s proměnnou ulehčí zápis a řešení úlohy (tabulky, vzorce, řešení úloh)
Prometheus O. Odvárko, J. Kadleček	∗proměnná je představena samostatně v motivační úloze ∗v rámečku je ukázána souvislost výrazu s proměnnou s číselným výrazem	∗využití při zápisu vzorců v matematice a fyzice ∗zápis s proměnnou ulehčí řešení úloh
Prometheus J Herman a kol.	∗výrazy s proměnnou navazují na číselné výrazy ∗proměnná je písmeno nahrazující číslo v číselném výrazu ∗úvodní úloha – obvod čtverce	∗využití při zápisu vzorců v matematice
SPN Z. Půlpán, M. Čihák, J. Trejbal	∗výrazy s proměnnou navazují na číselné výrazy ∗proměnná nahradí měnící se číslo v číselném výrazu	∗ využití při zápisu vzorců v matematice a fyzice
Fortuna J. Coufalová a kol.	∗proměnná je představena samostatně v motivační úloze ∗je ukázána souvislost výrazu s proměnnou s číselným výrazem	∗není zde ukázán význam ∗jsou zde slovní úlohy, kde místo konkrétních čísel jsou písmena (např. x děvčat, y chlapců)
Nová škola M. Jedličková a kol.	∗proměnná je představena na úloze z fyziky	∗písmeno nahrazuje číslo, které neznáme

Tabulka 2: Shrnutí analýzy učebnic – hladina standartní manipulace

	Hladina standartní manipulace	
	Zavedení sčítání, odčítání a násobení výrazů s proměnnou	Úlohy na procvičení
Fraus H. Binterová, E Fuchs, P. Tlustý	∗pomocí názorných úloh – z geometrie – ze života – úloha „jablka a hrušky“ ∗rámečky – šipky u násobení	∗gradované úlohy s rychle rostoucí obtížností ∗nedostatečné množství (učebnice je doplněna pracovním sešitem)
Prometheus O. Odvárko, J. Kadleček	∗ukázkové řešené příklady – z geometrie ∗rámečky – šipky u násobení – „jablka a hrušky“	∗dostatek gradovaných úloh, které mají formální charakter
Prometheus J Herman a kol.	∗ úloha „jablka a hrušky“ – sčítání věcí stejného druhu ∗násobení ukázáno s pomocí šipek	∗dostatek gradovaných úloh, které mají formální charakter
SPN Z. Půlpán, M. Čihák, J. Trejbal	∗pomocí názorných úloh – z geometrie – úloha „jablka a hrušky“ ∗rámečky – šipky u násobení – 1 až 2 na jedné stránce	∗dostatek gradovaných úloh Jen „technické“ na procvičování úprav, bez názornosti
Fortuna J. Coufalová a kol.	∗přehledné tabulky – návody na řešení	∗gradované úlohy Jen obyčejné na procvičování úprav, bez názornosti
Nová škola M. Jedličková a kol.	∗pomocí názorných úloh – z geometrie – s šipkami s popisem řešení	∗ nedostatečné množství (učebnice je doplněna pracovním sešitem)

4 Experimentální výuka

4.1 Popis experimentu

Cílem práce bylo na základě prostudování odborné literatury a učebnic naplánovat a realizovat podnětnou výuku výrazů s proměnnou, a to za pomoci algebraických dlaždic. Toto prostředí se mělo stát vhodným generickým modelem, pomocí něhož žáci nahlédnou do významu příslušných algebraických úprav.

Vyučování proběhlo paralelně ve dvou třídách 8. ročníku. Před zahájením výuky jsem žákům zadala pre-test, abych zjistila jejich vstupní úroveň znalostí. Po skončení výuky žáci opět psali test, abych zjistila, jaké znalosti při výuce získali. Bohužel nebylo možné z výuky pořizovat videozáznamy, proto jsem si psala terénní poznámky v průběhu výuky i po ní a sbírala žákovské artefakty (kopie jejich prací).

4.1.1 Charakteristika tříd

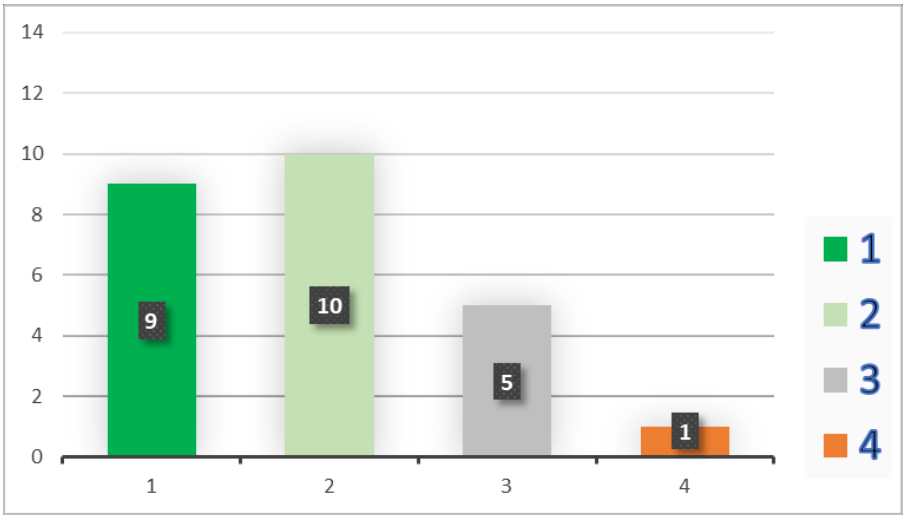
Žáci v obou třídách, kde experiment probíhal, jsou zvyklí na užití rozličných forem výuky, například na frontální výuku, na výuku ve skupinách i na samostatnou práci. Hodiny matematiky mají pevnou strukturu. Na úvod je pravidelně matematická rozcvička, potom následuje kontrola zadané domácí práce a opakování učiva minulých hodin, na které navazuje nové učivo. Na závěr shrneme probírané učivo a uděláme závěrečnou reflexi. Obsah probíraného učiva odpovídá školnímu vzdělávacímu programu školy.

Hodnocení v matematice je hlavně na základě písemných prací – kratší písemné práce (desetiminutovky) se píší každý týden, dále jsou to písemné práce na závěr tematických celků, čtvrtletní a pololetní písemné práce. Při klasifikaci žáků je zohledňována práce v hodině a aktivní příprava na vyučování v podobě plnění domácích prací. Žáci jsou vedeni k sebereflexi.

Třída 8. A

Ve třídě 8. A učím matematiku od 6. ročníku, tedy již třetím rokem. Klima třídy je přátelské, se třídou se dobře navazuje kontakt, jde o spolupracující žáky, které lze vhodným způsobem motivovat. Ve třídě je 14 chlapců a 11 dívek. Chlapci ve třídě hrají dominantní roli, dívky jsou spíše submisivní. Z toho vychází i živější atmosféra hodin.

Průměr pololetních známek z matematiky na vysvědčení byl 1,92.



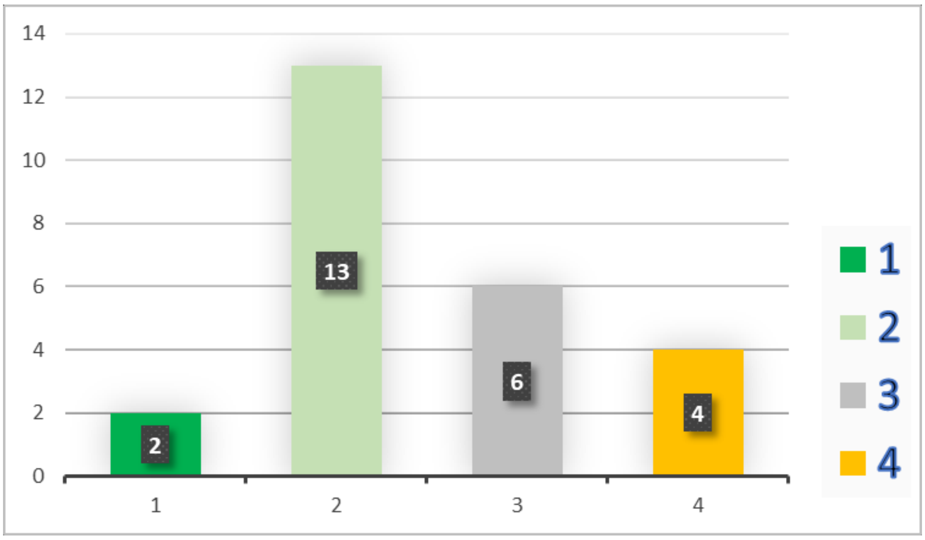
Obrázek 17: Rozložení pololetních známek z matematiky v 8. A

Matematické schopnosti a dovednosti této třídy jsou průměrné. Ve třídě je rovnoměrné rozložení žáků s dobrým matematickým úsudkem a žáků s úsudkem slabším. Dva žáci jsou v matematice velmi slabí.

Třída 8. C

Ve třídě 8. C učím matematiku od letošního školního roku, nyní tedy prvním rokem. Klima třídy je neutrální, vyčkávající, se třídou jsem komplikovaně navazovala kontakt. Může to být způsobeno i změnou učitele matematiky po 7. ročníku. Jde o žáky tiché, většinou méně spolupracující, které ale lze vhodným způsobem motivovat. Složením je třída chlapecká, skládá se ze 17 chlapců a 8 dívek. Chlapci ve třídě hrají dominantní roli, dívky jsou spíše submisivní.

Průměr pololetních známek z matematiky na vysvědčení byl 2,48.



Obrázek 18: Rozložení pololetních známek z matematiky v 8. C

Matematické schopnosti a dovednosti žáků třídy jsou na úrovni horšího průměru. Ve třídě převažují žáci se slabším matematickým úsudkem. Čtyři žáci jsou v matematice velmi slabí.

4.1.2 Příprava výuky

Při přípravě jsem se snažila využít poznatky získané při zpracovávání teoretické části práce. Hladina modelování (Hejný, 1990) nabízí velký prostor pro motivaci žáků ke studiu algebry. Na této hladině by žáci měli pocítit potřebu použít symbolický zápis. Symbolický zápis by neměl být pouze instruktivně přijat od učitele, měl by vyplynout z činnosti žáka. Z analýzy učebnic lze vyvodit, že této hladině není dáván v učebnicích dostatečný prostor. Symbolický zápis je obvykle předkládán jako zobecněný předpis na jednom příkladě nebo jako vzoreček určený k zapamatování, což by mohlo vést k formálním znalostem žáků.

Při hledání cizojazyčného materiálu jsem objevila publikaci *Patterning and Algebra*[3] (2008), která je určena učitelům, aby ve svých hodinách matematiky pomohli žákům pomocí několika různých matematických modelů proniknout lépe do algebraického prostředí. V této publikaci také zmiňují, jak je pro žáka důležité postupným řešením úloh budovat cestu k pochopení souvislostí v matematice. Při sestavování výukových materiálů jsem se touto publikací nechala inspirovat.

Ve svém experimentu jsem v hladině modelování připravila číselné řady, opakující se geometrické vzory a přepis slovního vyjádření do symbolického zápisu. Pro hladinu strategických manipulací, kam patří sčítání, odčítání a násobení výrazů, dále pak úprava výrazu na součin pomocí vytýkání nebo pomocí vzorců jsem zvolila prostředí algebraických dlaždic. Hojně se setkáme s použitím těchto dlaždic v anglickém prostředí. Existuje i řada apletů v angličtině. V českém prostředí se dlaždicemi zabývá Vondrová (2019). Použití algebraických dlaždic je také součástí řešení úloh v učebnicích C, D určených pro tzv. Hejného metodu v kapitolách Jazyk písmen.

[3] Ministry of Education: *Patterning and algebra*, grades 4 to 6. (2008). Toronto. Ontario. [online]. [cit. 2015-12-08]. Dostupné z www: http://thelearningexchange.ca/wp-content/uploads/2017/01/Patterning-and-Algebra-4-6.pdf

Číselné řady

Číselné řady jsou posloupnosti čísel svázaných určitým pravidlem a úkolem žáka je toto pravidlo odhalit a doplnit následující čísla. Pro účel experimentální výuky jsem volila jednodušší řady, protože jejich účelem bylo vyvolat u žáků potřebu symbolického zápisu.

V pracovním listě 1 jsem seřadila úlohy podle náročnosti (viz příloha 2). Jsou to číselné řady spolu s grafickou interpretací, která žákům pomůže představit si, jak řada pokračuje. V prvním kroku žáci doplní další dva členy řady. Poté následují otázky navazující na tyto úlohy:

Jaký bude 10. člen posloupnosti?

Jaký bude 20. člen posloupnosti?

Jaký bude 100. člen posloupnosti?

Jaký bude *n*-tý člen posloupnosti?

Žáci budou vedeni k zapisování poznatků do tabulky a hledání souvislostí. Budou pracovat ve skupinkách.

Dobrovolná úloha pro žáky – vymyslet úlohu pro ostatní.

Geometrické vzory

U geometrických vzorů je opět úkolem najít pravidlo, pomocí kterého jsou vzory tvořeny (viz příloha 3). Na geometrické vzory jsem využila dřívka, která někteří žáci znají již z prvního stupně. První dvě úlohy jsem čerpala z dílen z letní školy Hejného metody, další dvě úlohy jsou z pracovního sešitu C nakladatelství H-mat.

Přepis do symbolického jazyka

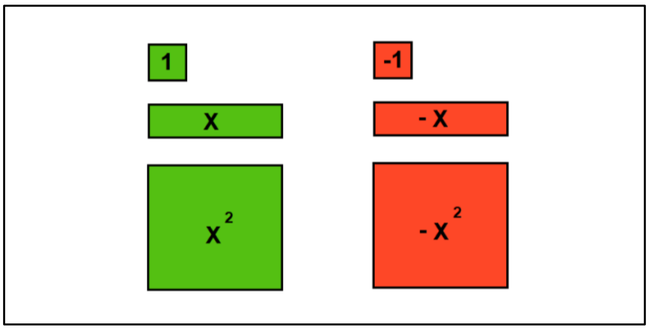
Cílem předešlých úloh bylo motivovat žáky k symbolickému jazyku. Dalším krokem je seznámit je s tím, jak symbolický zápis zjednoduší naše vyjadřování. Je to přepis vět do matematického zápisu a použití matematických vzorců na výpočet plochy, objemu, délky úhlopříčky apod. Tyto úlohy budu zařazovat průběžně do vyučování.

Příklad úloh na přepis do matematického jazyka:

1. Součet rozdílu čísel 7 a 8 a podílu čísel 4 a 2
2. Podíl součtu čísel 5 a 15 a rozdílu čísel 6 a 2
3. Rozdíl druhých mocnin čísel 4 a 3
4. Druhá mocnina rozdílu čísel 4 a 3
5. Druhá odmocnina součtu čísel 36 a 64
6. Součet druhých odmocnin čísel 36 a 64

Algebraické dlaždice

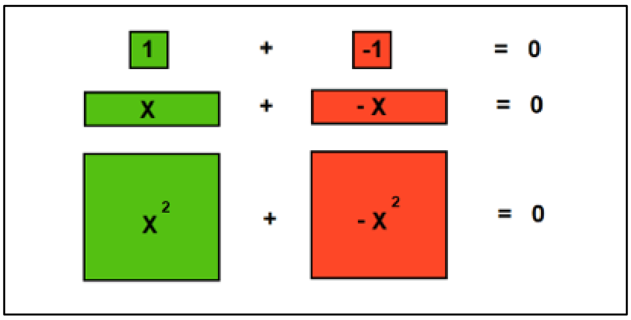
Toto prostředí nabízí vizualizaci úprav výrazů s proměnnou, a to jednoduchou manipulací s těmito dlaždicemi. Vizualizace pomáhá žákům s přechodem k abstraktním úpravám. Algebraické dlaždice se vyskytují v různých variantách (Vondrová, 2019). V jedné z nich jsou čtverce a obdélníky, které symbolizují x^2, x a jednotky (obr. 21). Velký čtverec má délku strany x, jeho obsah je tedy x^2. Malý čtverec má délku strany 1, jeho obsah je tedy také 1. Obdélník má kratší stranu délky 1 a delší stranu délky x, jeho obsah je x. Doporučení je, aby strana, která symbolizuje x, nebyla násobkem délky strany, která symbolizuje 1. A to z toho důvodu, aby žáci neměli dojem, že x je konkrétní hodnota. Odčítání je znázorněno jako přičítání opačného výrazu, proto jsou v některých variantách dlaždice oboustranné a z každé strany mají jinou barvu. Zvolila jsem zelenou a červenou. Zelená symbolizuje členy se znaménkem plus a červená členy se znaménkem mínus (viz obr. 21).



Obrázek 19: Základní algebraické dlaždice

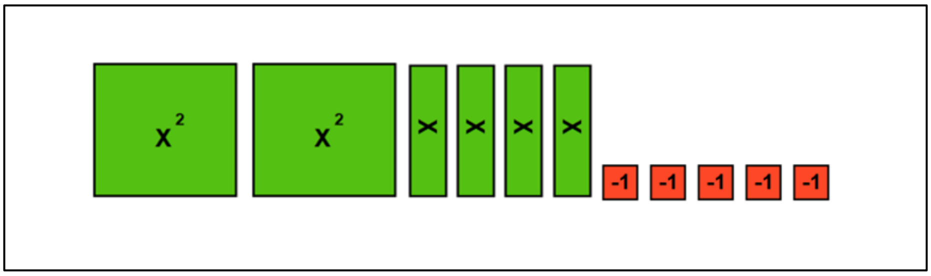
Modelování v prostředí algebraických dlaždic

Nejprve dojde k seznámení žáků s pravidly používání dlaždic a zopakování souvislosti s geometrií – obsah čtverce a obdélníku.



Obrázek 20: Pravidlo pro sčítání

Pokud se při manipulaci objeví během řešení jedné úlohy dva stejné tvary s různými barvami, tak se vynulují a oba dva „vypadávají ze hry“ (viz obr. 22). Na obrázku 23 je názorná ukázka modelování výrazu $2x^2 + 4x - 5$.

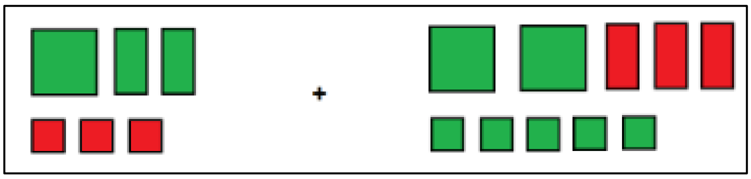


Obrázek 21: Ukázka modelování výrazu

V tomto prostředí je možné žákům i ukázat rozdíl mezi jednočlenem a mnohočlenem, tedy určit počet členů mnohočlenu. Jeden člen je jeden tvar, např. na obr. 23 jsou tři členy, tři různé tvary.

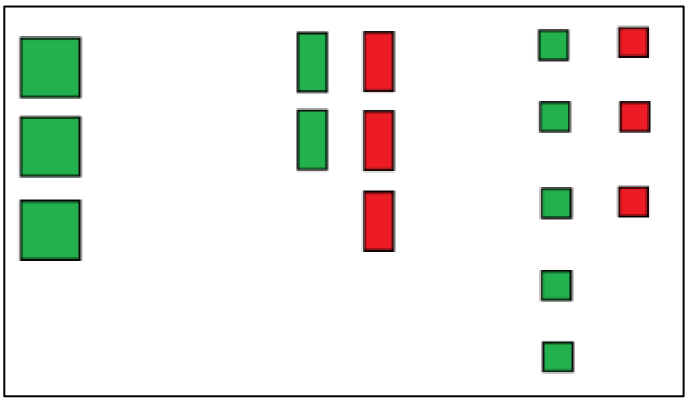
Sčítání mnohočlenů

Při modelování sčítání mnohočlenů žáci nejprve sestaví jednotlivé mnohočleny. Na obrázku 24 je znázorněna konkrétní úloha $(x^2 + 2x - 3) + (2\,x^2 - 3x + 5) = 3x^2 - x + 2$, na které ukáži postup modelování.

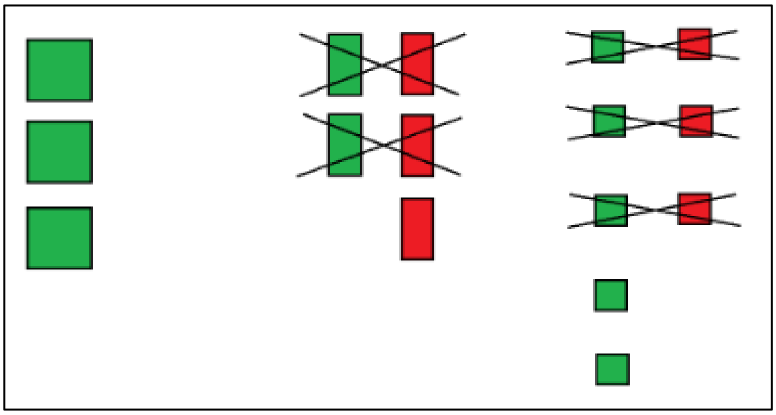


Obrázek 22: Sestavení mnohočlenů při sčítání

Ve druhém kroku dají žáci dohromady jednotlivé tvary (obr. 25), použijí pravidlo znázorněné na obr. 22, tzn. dlaždice, které mají stejný tvar a opačnou hodnotu, se vynulují (obr. 26).

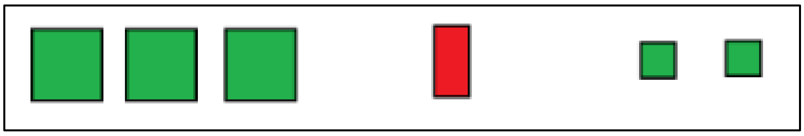


Obrázek 23: Porovnání jednotlivých tvarů



Obrázek 24: Odstranění obrazců

Zbývající dlaždice (obr. 27) jsou výsledkem úpravy.



Obrázek 25: Výsledek manipulace

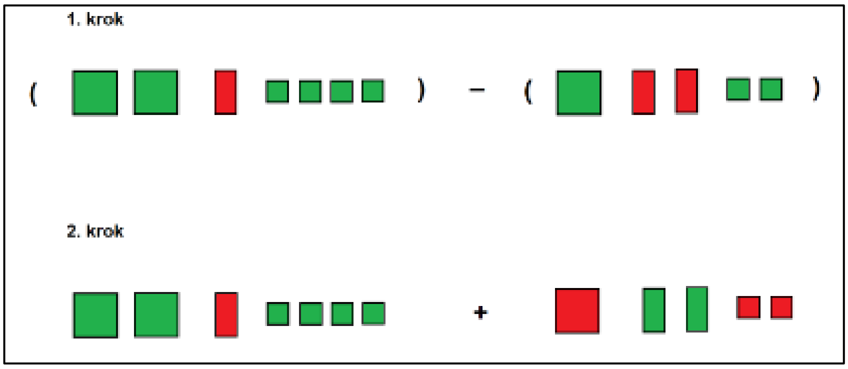
Při sčítání mnohočlenů je výhodné vést žáky k tomu, aby nejprve sestavili výrazy jednotlivě. A teprve po znázornění jednotlivých výrazů je sečtou, tedy dají výrazy dohromady. Tento postup bude důležitý při modelování odčítání.

Odčítání mnohočlenů

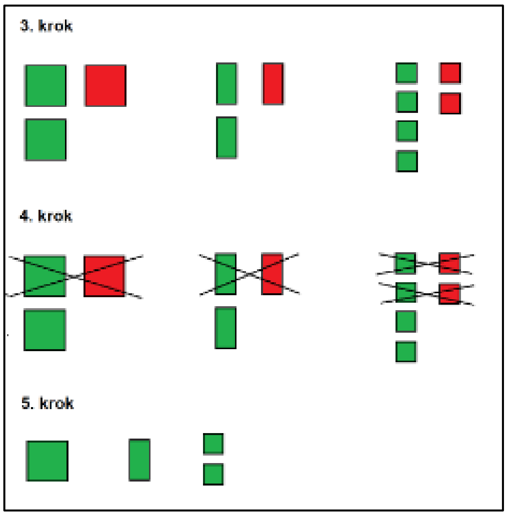
Před modelováním odčítání nejprve s žáky zopakuji odčítání celých čísel. Příklad $3 - 7$ lze zapsat $3 + (-7)$, tzn. odečtení čísla 7 znamená přičtení opačného čísla k číslu 7. Podobně budeme odečítat mnohočleny. Odečíst mnohočlen znamená přičíst opačný mnohočlen, přičemž sčítání mnohočlenů už žáci znají. V prvním kroku tedy nejprve z odečítaného mnohočlenu vytvoří opačný mnohočlen. Ve druhém kroku tento opačný mnohočlen přičtou. Obrázek 28 ukazuje tyto dva první kroky modelování na úloze

$(2x^2 - x + 4) - (x^2 - 2x + 2) = (2x^2 - x + 4) + (-x^2 + 2x - 2) = x^2 + x + 2.$

Další kroky jsou stejné jako při sčítání mnohočlenů (obr. 29).



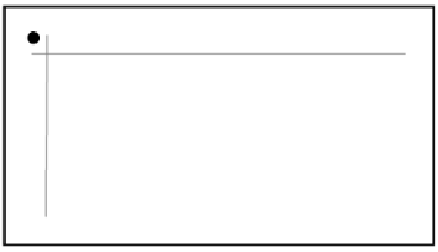
Obrázek 26: První dva kroky při modelování odčítání



Obrázek 27: Dokončení modelování odčítání

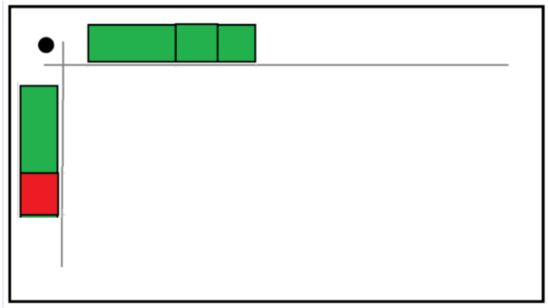
Násobení mnohočlenů

Násobení jednočlenů a mnohočlenů v prostředí algebraických dlaždic znamená seskupení dlaždic do obdélníku, a to tak, že strany tohoto obdélníku jsou určeny výrazy, které násobíme. Při této manipulaci je vhodné použít pomocnou podložku (obr. 30), kde ve vodorovném směru žáci zobrazí jeden z násobených výrazů, ve svislém směru druhý z násobených výrazů.



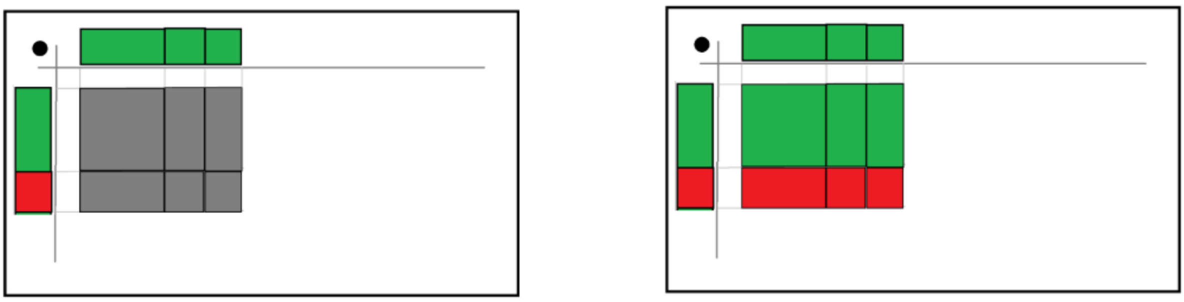
Obrázek 28: Podložka pro znázorňování násobení

Celý způsob manipulace při násobení dvou algebraických výrazů ukáži na konkrétním příkladu násobení $(x + 2)\cdot(x - 1)$. Nejprve znázorníme násobené výrazy podél jednotlivých stran (obr. 31).



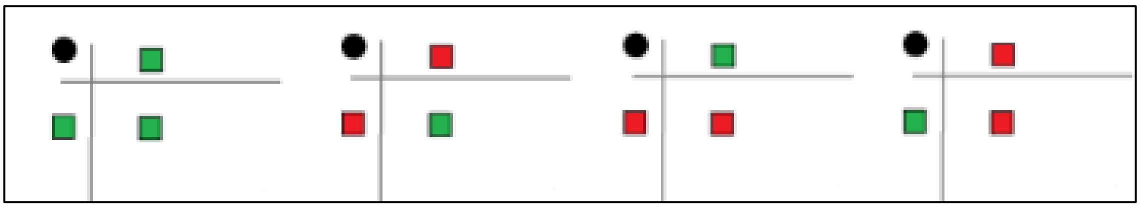
Obrázek 29: Rozložení násobených výrazů

Druhým krokem je vytvoření „průniku“ dlaždic, který vytvoříme vynesením pomyslných rovnoběžek se sousední stranou. Vzniklé útvary vyznačím šedou barvou, protože v tomto kroku se soustředíme pouze na určení velikosti výsledku násobení každého členu s každým (obr. 32 levá část).



Obrázek 30: Vyjádření násobení

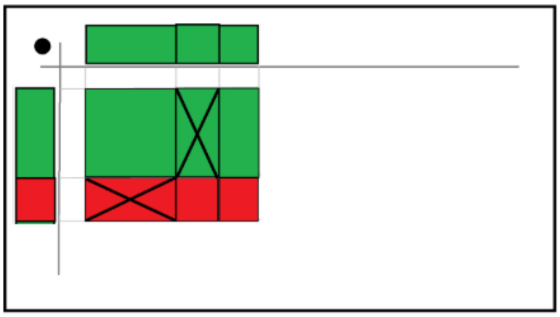
Ve druhém kroku za pomoci pravidel pro určení znaménka (obr. 33) určíme barvu dlaždice, a tedy znaménko každého členu (viz pravá část obrázku 32).



Obrázek 31: Pravidla násobení při modelování

Nyní máme z dlaždic vyskládaný obdélník, který představuje součin výrazů $(x + 2)\cdot(x - 1)$, což je $x^2 - x + 2x - 2$ (obr. 32 pravá část). Pokud se v obdélníku objeví dva stejné tvary s různými barvami, tak se vynulují, podobně jako tomu bylo při sčítání (obr. 2) a oba odstraníme (obr. 34).

Touto manipulací vlastně dochází k další úpravě výrazu $x^2 - x + 2x - 2 = x^2 + x - 2$. Výsledek je zobrazen na obrázku 35.



Obrázek 32: Použití pravidla pro sčítání

Obrázek 33: Výsledek modelování výrazu

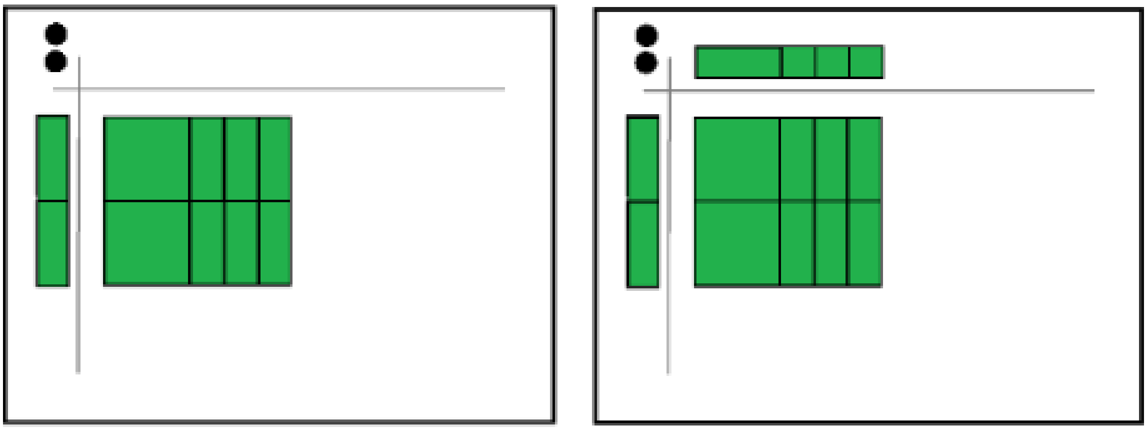
Modelování násobení výrazu lze využít k objevu roznásobování závorky. V učebnicích je roznásobování výrazu zpravidla vysvětleno pomocí šipek a vyjádření, že každý člen násobíme s každým. Tento postup je při modelování názorně vidět.

Dělení mnohočlenů

Při modelování dělení mnohočlenů v prostředí algebraických dlaždic postupujeme opačně než u násobení. Nejprve sestavíme z dlaždic, které reprezentují dělenec, obdélník, jehož jedna strana má délku dělitele. Druhou stranou tohoto obdélníku je podíl (obr. 36, 37).

Dělení jednočlenem

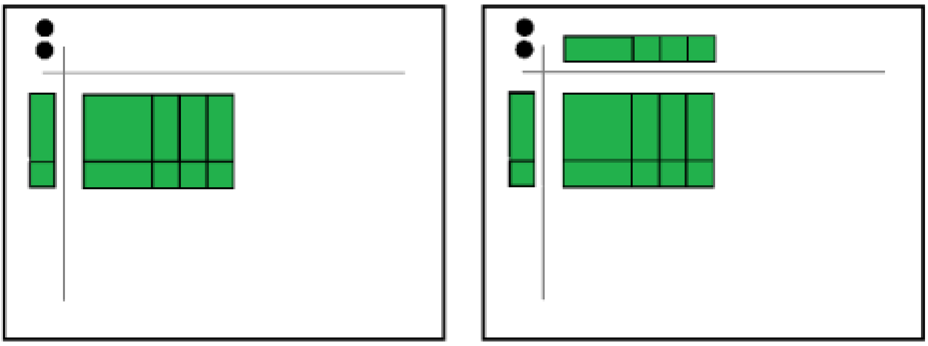
Příklad: $(2x^2 + 6x) : 2x = x + 3$



Obrázek 34: Znázornění dělení jednočlenem

Dělení mnohočlenem

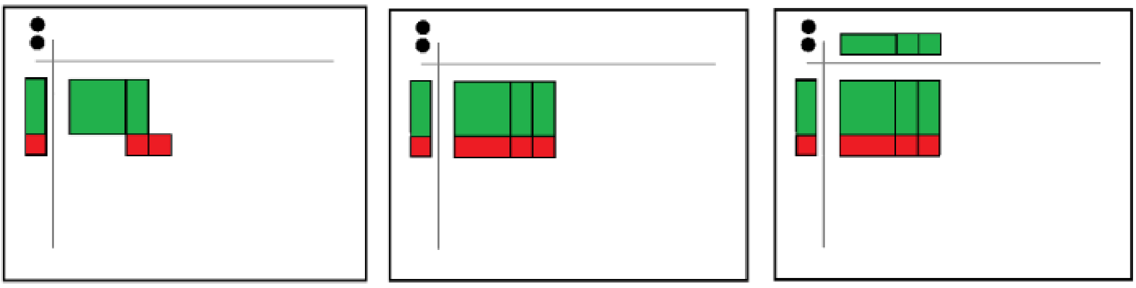
Příklad: $(x^2 + 4x + 3) : (x + 1) = x + 3$



Obrázek 35: Znázornění dělení mnohočlenem

Pokud je v dělenci znaménko mínus, je třeba mít na mysli pravidlo z obrázku 22. V prvním kroku se dlaždice znázorňující dělenec uspořádají do obrazce, který naznačuje obdélník. Jsou v něm volná místa po dlaždicích, které reprezentují ty členy, které se dle dříve uvedených pravidel násobení vzájemně vynulují (obr. 34). Ve druhém kroku se obrazec z prvního kroku doplní dlaždicemi na obdélník. Výsledkem dělení je délka strany obdélníku. Celý postup při modelování je znázorněn na obrázku 38.

Příklad: $(x^2 + x - 2) : (x - 1) = x + 2$



Obrázek 36: Znázornění dělení mnohočlenem – v dělenci je znaménko mínus

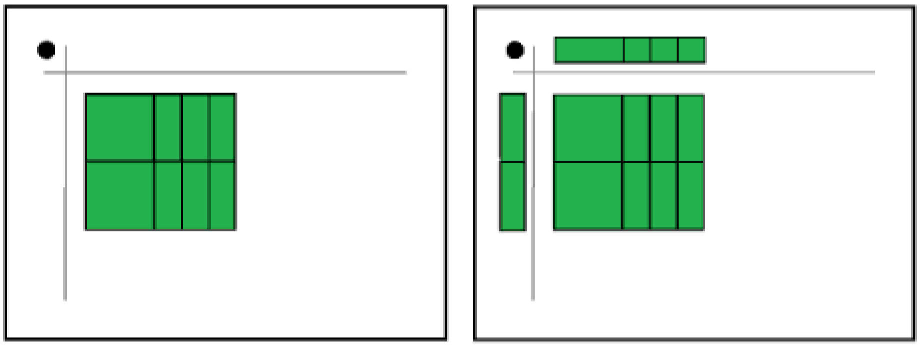
Rozklad mnohočlenu na součin

Rozkladem mnohočlenu na součin rozumíme vyjádření daného mnohočlenu jako součinu jednodušších mnohočlenů. Patří sem vytýkání a rozklad na dva stejné mnohočleny, k čemuž se používá známých vzorců pro druhou mocninu dvojčlenu a rozklad na dva různé mnohočleny. Rozklad mnohočlenu na součin je pro žáky náročný, vyžaduje již jistou zkušenost s výrazy.

Vytýkání

Vytýkání je hledání činitelů společných všem členům mnohočlenu. Při manipulaci s dlaždicemi tak hledáme, co mají jednotlivé tvary společného. Například výraz $2x^2 + 6x$ znázorníme čtverci a obdélníky, které mají společnou délku strany x a společným dělitelem jejich počtu je dvojka, D (4,6) = 2. Při manipulaci tedy vyrovnáme dlaždice do obdélníku ve dvou řadách. Délka jedné strany obdélníku představuje výraz, který vytýkáme, viz obr. 39.

Příklad: $2x^2 + 6x = 2x(x + 3)$

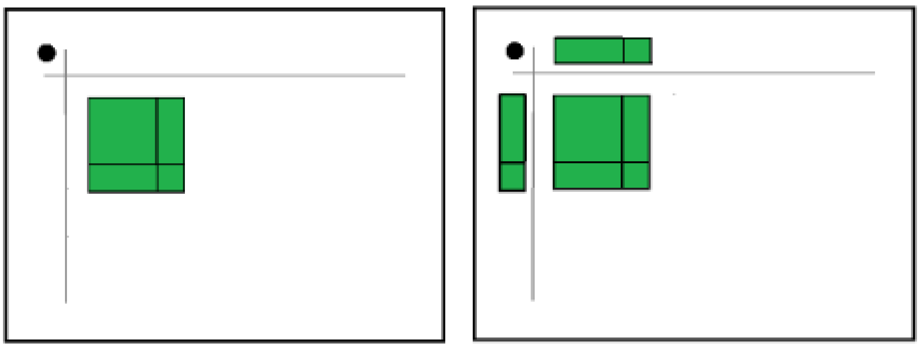


Obrázek 37: Znázornění vytýkání

Rozklad na součin dvou stejných mnohočlenů

Součin dvou stejných mnohočlenů $(a + b)(a + b)$ můžeme pro zkrácení zápisu též psát $(a + b)(a + b) = (a + b)^2$. Na tento rozklad používáme vzorec $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$. Při modelování dlaždicemi sestavíme dlaždice do čtverce, kde strana čtverce představuje hledaný mnohočlen, viz obr. 40.

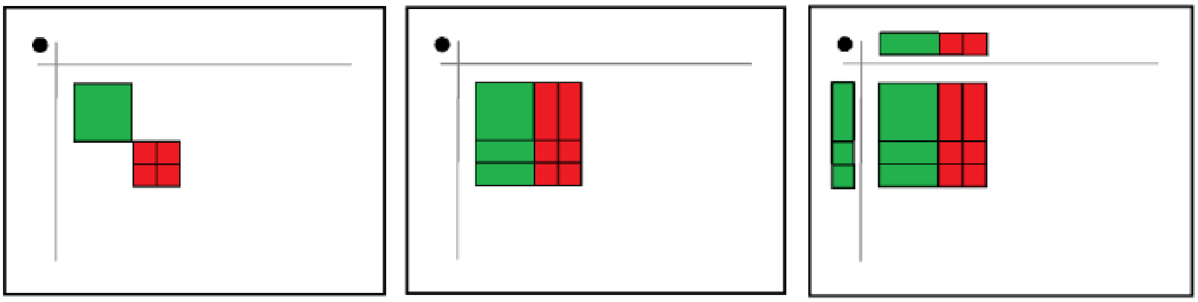
Příklad: $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)(x + 1)$



Obrázek 38: Znázornění rozkladu na součin podle vzorce $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

Do této skupiny lze zařadit i rozklad mnohočlenu $a^2 - b^2$ podle vzorce $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$. K nalezení řešení je opět potřeba dlaždice uspořádat do čtverce. V tomto případě je třeba mít na mysli pravidlo z obr. 22. Ve čtverci vzniknou volná místa po dlaždicích, které reprezentují ty členy, které, kdybychom dělali zkoušku a vynásobili dělitel a podíl, by se sečtením vynulovaly, viz obr. 41.

Příklad: $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$

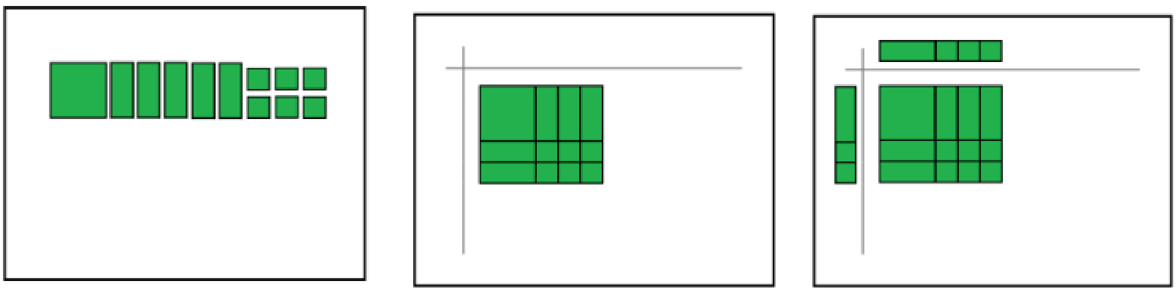


Obrázek 39: Znázornění rozkladu podle vzorce $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Rozklad na součin dvou různých mnohočlenů

Rozkladem mnohočlenu na součin dvou různých mnohočlenů se nezabývá žádná z analyzovaných učebnic, přesto jsem i tento rozklad zařadila do experimentální výuky. V tomto případě chceme rozložit mnohočlen $x^2 + bx + c;\ b,\ c \in \mathrm{Z},\ x \in \mathrm{R}$ na součin dvou mnohočlenů $x^2 + bx + c = (x + u)(x + v) = x^2 + ux + vx + uv = x^2 + (u + v)x + uv$, z čehož plyne, že $b = u + v$ a $c = uv$; $u,\ v \in \mathrm{Z}$. V prostředí dlaždic to znamená, že zadaný mnohočlen zobrazíme pomocí dlaždic, které vyskládáme do obdélníku. Strany tohoto obdélníku znázorňují jednotlivé mnohočleny hledaného součinu (obr. 42).

Příklad: $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$



Obrázek 40: Znázornění rozkladu $x^2 + 5x + 6$ na součin

Prostředí dlaždic můžeme dále využít i při řešení lineárních rovnic.

Nevýhody prostředí algebraických dlaždic

V prostředí algebraických dlaždic, tak jak jsem je představila, můžeme modelovat výrazy s jednou proměnnou a nejvyšší mocnina, která zde může být, je druhá mocnina. Pro úvod do úprav výrazů je to postačující. Žáci si při manipulacích s dlaždicemi mají možnost uvědomit základní zákonitosti, které posléze mohou aplikovat i u výrazů, které nelze modelovat v prostředí dlaždic. Toto prostředí by bylo možné rozšířit o druhou proměnnou y. Druhou mocninu by tak reprezentovaly čtverce o jiném rozměru než ty, které reprezentují x^2, y by pak reprezentovaly obdélníky s delší stranou délky y. Nově by přibyly obdélníky, jejichž strany by měly délku x a y.

Procvičování

K procvičování úpravy výrazů použiji pyramidy, součinové čtverce, algebraické domino, doplňovačky, hry.

4.1.3 Plán experimentální výuky

Téma: Algebraické výrazy

Očekávané výstupy: Žák matematizuje jednoduché reálné situace s využitím proměnných; určí hodnotu výrazu, sčítá, odčítá a násobí mnohočleny, provádí rozklad mnohočlenu na součin pomocí vzorců a vytýkáním.

Věk žáků: 13–14 let (8. ročník)

Potřebné znalosti a dovednosti: Žák provádí početní operace v oboru celých a racionálních čísel, dodržuje zde pravidla pro pořadí početních operací, využívá vlastnosti operací sčítání a násobení (komutativnost, asociativnost, distributivnost) při úpravě číselných výrazů. Žák užívá ve výpočtech druhou mocninu a odmocninu, zná zpaměti druhé mocniny celých čísel od 1 do 10 a využívá je při výpočtech (i ke stanovení odpovídajících druhých odmocnin).

Odhad počtu vyučovaných hodin: Výrazy s proměnnou jsou velmi rozsáhlou kapitolou. Předpokládám, že výuka potrvá cca 45 hodin. V těchto hodinách je započtena i jedna hodina na pre-test a jedna hodina na závěrečný test.

Potřebné pomůcky: pracovní listy, algebraické dlaždice, tabule, projektor, vizualizér.

Metoda: Žáci budou pracovat ve skupinách, ve dvojicích i samostatně. Svou práci budou zaznamenávat do pracovních listů a sešitů. Svá řešení budou prezentovat u tabule, kde se budou snažit vysvětlit svůj postup spolužákům. U náročnějších úloh by měli žáci společně ve skupině hledat řešení, čímž rozvíjejí své kompetence. Učitel je zde v roli koordinátora hodiny, pokládá doplňující otázky, kterými by měl žáky dovést k cíli. V případě, že žáci sami nejsou schopni přijít na řešení, může jim poskytnout malou nápovědu. Není vhodné žákům prozradit celý postup.

Očekávané problémy: V experimentální výuce se může objevit několik problémů. Prvním z nich je kázeň, zvlášť při skupinové práci. Očekávám, že někteří žáci budou mít tendence používat algebraické dlaždice i jiným způsobem než jen k modelování algebraických výrazů. Dalším úskalím skupinové práce je, že slabší žáci se snaží ve skupině schovat a nepracovat. Abych předešla této nečinnosti, snažím se vytvořit vyrovnané skupiny a prezentovat práci skupiny jde náhodně vybraný člen. Ti, kterým se v matematice daří, přirozeně přeberou vůdčí roli ve skupině a zároveň mají zájem na tom, aby jejich práce byla dobře odprezentována, takže zapojují do práce slabé žáky.

Při tvorbě úloh jsem se snažila, aby tyto úlohy byly gradované. Úlohy označené hvězdičkou * jsou určeny pro rychlé žáky. Navíc se snažím mít vždy v zásobě úlohy pro zájemce.

Vyučovací hodina 1

Téma hodiny: Vypracování pre–testu

Cíl hodiny: Žáci samostatně vypracují pre-test (viz příloha 1).

Po odevzdání pre-testu vyřešíme úlohy z něj společně na tabuli. Vysvětlíme si nejasnosti.

Vyučovací hodina 2

Téma hodiny: Číselné řady

Cíl hodiny: Žáci by měli sami začít používat symbolický zápis.

V této hodině budou žáci řešit číselné řady z pracovního listu 1 (viz příloha 2). Úkolem žáků je najít další členy těchto řad. V pracovním listě jsem seřadila úlohy podle náročnosti. Jsou to číselné řady spolu s grafickou interpretací, která žákům pomůže představit si, jak řada pokračuje. V prvním kroku žáci doplní další dva členy řady. V tomto kroku budou žáci pracovat samostatně, případně ve dvojicích v lavici. Poté budou následovat otázky navazující na tyto úlohy:

Jaký bude 10. člen posloupnosti?

Jaký bude 20. člen posloupnosti?

Jaký bude 100. člen posloupnosti?

Jaký bude n-tý člen posloupnosti?

Žáci budou vedeni k zapisování poznatků do tabulky a hledání souvislostí. V tomto kroku budou pracovat ve skupinách.

Dobrovolná úloha pro žáky – vymyslet úlohu pro ostatní.

Vyučovací hodina 3

Téma hodiny: Geometrické vzory

Cíl hodiny: Žáci by měli sami začít používat symbolický zápis.

U geometrických vzorů je opět úkolem najít pravidlo, pomocí kterého jsou vzory tvořeny (viz příloha 3). Žáci budou pracovat ve skupinách. Po vyřešení každé úlohy budou skupiny sdílet svá řešení na tabuli a diskutovat o svých výsledcích.

Vyučovací hodina 4

Téma hodiny: Úvod do výrazů s proměnnou

Cíl hodiny: Žáci se naučí terminologii týkající se algebraických výrazů – výraz, proměnná, koeficient, jednočlen, mnohočlen, hodnota výrazu. K seznámení dojde na již známých úlohách.

Rozcvička na začátek hodiny:

$5 \cdot 2^2 + 3 \cdot 4 - 8 =$

$5 \cdot (2^2 + 3) \cdot (4 - 8) =$

$5 \cdot 2^2 + 3 \cdot (4 - 8) =$

$5 \cdot (2^2 + 3 \cdot 4) - 8 =$

$5 \cdot (2^2 + 3) \cdot 4 - 8 =$

Úkolem rozcvičky je zopakovat si pravidla pro úpravu číselných výrazů.

Úloha 1: Urči obsah čtverců, jejichž strany mají délku 2 cm, 5 cm, 7 cm.

Úloha 2: Urči obvod obdélníků, jejichž strany mají délku 2 cm a 8 cm, 3 cm a 6 cm, 4 cm a 10 cm.

Úloha 3: Urči objem krychlí, jejichž hrany mají délku 2 cm, 3 cm, 4 cm.

Pomocí prvních třech úloh, které by žákům neměly dělat problémy, se žáci seznámí s pojmy číselný výraz, výraz s proměnnou, hodnotu výrazu, jednočlen a mnohočlen. Předpokládám, že žáci využijí znalostí vzorců na obvod, obsah a objem.

Úloha 4: Vstupné pro dospělou osobu (plná cena) na hrad stojí 120 Kč, snížené vstupné pro děti a důchodce je 80 Kč.

a) Zapiš výraz, který udává částku zaplacenou x dospělými a d dětmi.

b) Kolik celkem zaplatí návštěvníci v jedné skupině s 15 dospělými a 7 dětmi?

c) Ve skupině může být maximálně 30 osob. Kolik je možné maximálně vybrat na vstupném ve skupině s 10 dětmi?

*Úloha 5: Jdete na nákup a chcete si koupit jablka a mrkev. 1 kg jablek stojí 25 Kč a 1 kg mrkve stojí 22 Kč. Pokud nemáte tašku, můžete si ji za 3 Kč koupit. a) Zapište, kolik budete platit za nákup, když koupíte b kg jablek a c kg mrkve. b) Vypočítejte, kolik zaplatíte za nákup, když koupíte 3 kg jablek a 2 kg mrkve. Uvažujte obě varianty – máte vlastní tašku, tašku si koupíte.

Vyučovací hodina 5

Téma hodiny: Jednočlen, mnohočlen, hodnota výrazu

Cíl hodiny: Žáci si upevní znalosti z minulé hodiny.

Rozcvička na začátek hodiny – Zapiš pomocí matematických znaků a vypočítej:

1. Součet rozdílu čísel 7 a 8 a podílu čísel 4 a 2
2. Podíl součtu čísel 5 a 15 a rozdílu čísel 6 a 2
3. Rozdíl druhých mocnin čísel 4 a 3
4. Druhá mocnina rozdílu čísel 4 a 3
5. Druhá odmocnina součtu čísel 36 a 64
6. Součet druhých odmocnin čísel 36 a 64
7. Rozdíl součinu čísel 7 a 8 a podílu čísel 4 a 2
8. O jaké výrazy se jedná?

Úloha 1: Ze zadání vyber výrazy s proměnnými a zakroužkuj je.

$3 + 2$ $4x$ $13 – 5a$ $6c + d – 7$ $3 \cdot 9$ 12,04

Urči počet členů v jednotlivý výrazech.

Úloha 2: Vypočítej hodnotu výrazů v tabulce pro proměnné $r = 2$, $s = -2$

$r + s$	$2 \cdot r – 3 \cdot s$	$7 \cdot r \cdot s$	* $5 \cdot r \cdot s + 2 \cdot s$	* $4 \cdot r \cdot (3 \cdot r – s)$

I u této úlohy si společně řekneme počet členů ve výrazu a proč tento počet je právě takový.

Úloha 3: Číslo x je libovolné celé číslo. Podle zadání zapiš matematické výrazy.

Celé číslo, které je v řadě za x.

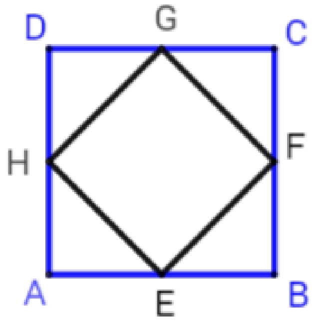
Celé číslo, které je v řadě před x.

Součin čísla x a dvou čísel, která za x následují.

Aritmetický průměr tří po sobě jdoucích čísel, x je jedním z nich.

Úloha 4: Je dán čtverec $ABCD$ s délkou strany a. Body E, F, G, H jsou středy stran čtverce. Pomocí matematických výrazů s proměnnou vyjádři zadané údaje.

a) Délka úsečky AE
b) Délka úsečky EF
c) Obsah čtverce $ABCD$
d) Obsah čtverce $EFGH$
e) Obvod čtverce $ABCD$
f) Obvod čtverce $EFGH$



Kolik členů mají jednotlivé výrazy?

Jaká bude hodnota výrazů pro $a = 3$ cm?

*Úloha 5: Král dělil část svých pozemků mezi tři syny. Prvnímu dal jednu čtvrtinu, druhému dal o 30 ha méně než prvnímu a třetímu dal 20 % z celku. Zapiš, jakou část pozemků král dal svým synům.

Předpokládané problémy: U úlohy 3 očekávám problém s aritmetickým průměrem. Doufám, že žáci společně, s případnými návodnými otázkami najdou řešení. Dalším menším úskalím je v úloze 4 délka úsečky EF, kde je potřeba použít Pythagorovu větu.

Vyučovací hodina 6

<u>Téma hodiny</u>: Sčítání a odčítání jednočlenů

<u>Cíl hodiny</u>: Žáci sčítají a odčítají jednočleny, využijí algebraické dlaždice.

Rozcvička: Je dán mnohočlen $2x + 3x^2 - 6y + x^2y^3$.

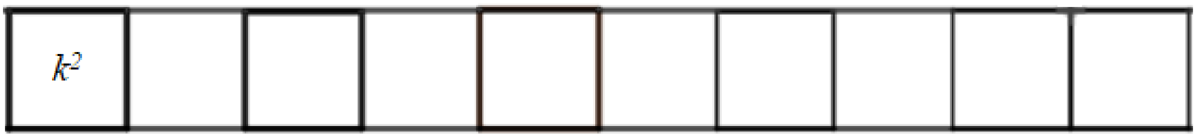
a) Kolik má mnohočlen členů?
b) Které proměnné obsahují jednotlivé členy?
c) Jaké jsou zde koeficienty?
d) Určete jeho hodnotu pro $x = 0$ a $y = 1$.

Úloha 1: Počítej s úsečkami

a) $5m + m$ b) $6m - 4m$ c) $2m + 3m$

d) $5m - m$ e) $2m + 7m$ f) $10m - 4m$

Úloha 2: Počítej se čtverci.



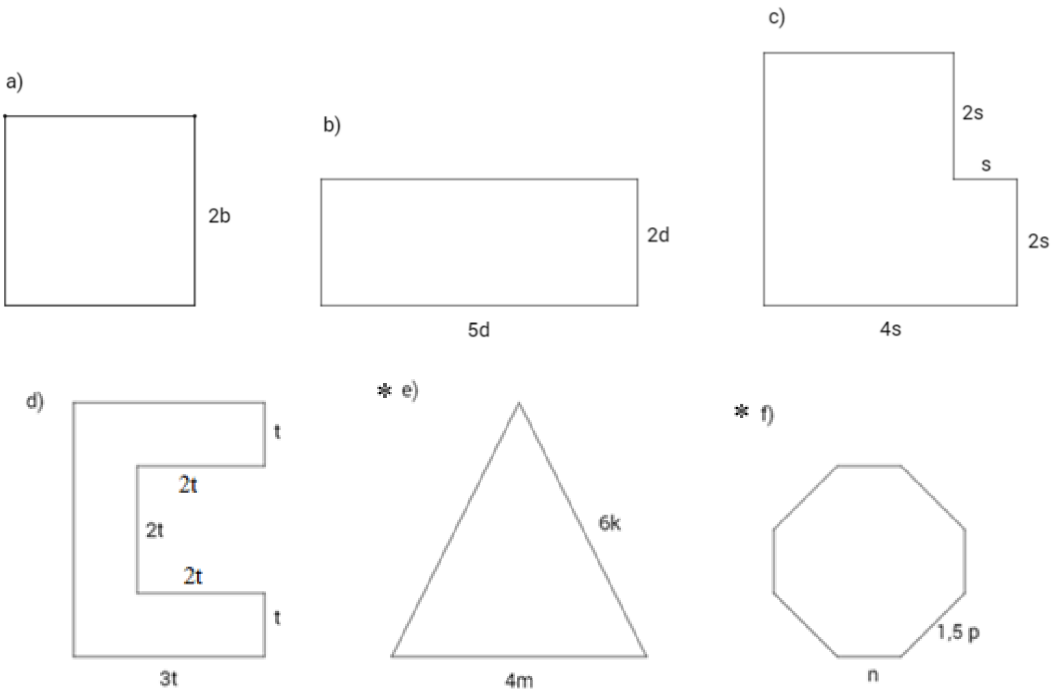
a) $k^2 + 7k^2 =$ b) $10k^2 - 8k^2 =$ c) $2k^2 + 6k^2 =$

d) $7k^2 - 4k^2 =$ e) $5k^2 + 4k^2 =$ f) $5k^2 - 2k^2 =$

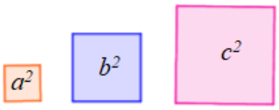
V úlohách 1 a 2 jsou sice pro názornost obrázky úsečky a čtverce, ale žákům zde poprvé představím i pomůcku algebraické dlaždice.

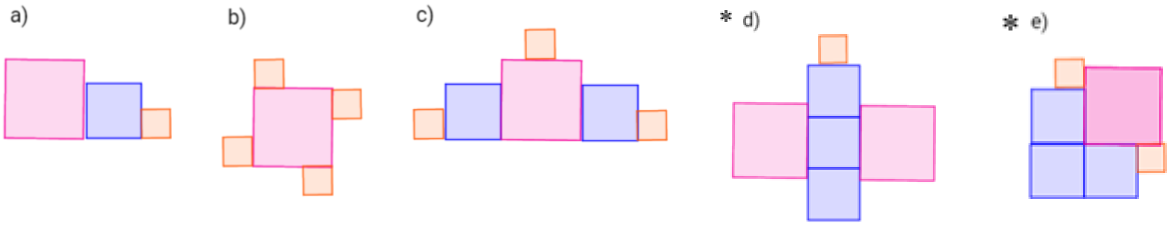
Úloha 3: Urči obvod jednotlivých obrazců.

U této úlohy by mohl vzniknout problém s určením délek stran, které nejsou zapsány a dají se dopočítat ze známých délek.



Úloha 4: Zapiš pomocí výrazů obsah jednotlivých obrazců, když víš, že:





Úloha 5: Zjednoduš:

$b + 2b^2 + 3b + 4b^2 =$

$6a^2 - 3a + 4a - 2a^2 =$

$6r^2 + 4s^2 - 2r^2 + 2s^2 =$

d) $-3a^2 - 5a + 4a + 2a^2 =$

*e) $3{,}5x + 0{,}2x^2 - 2{,}2x + 1{,}3x^2 =$

*f) $2{,}3z^2 + 4{,}2v^2 - 2{,}1v^2 + 1{,}5z^2 =$

U této úlohy mohou žáci opět využít modelování pomocí algebraických dlaždic. Očekávám diskusi u úlohy c), kde jsou dvě proměnné, a úloh e) a f), kde jsou jako koeficienty desetinná čísla.

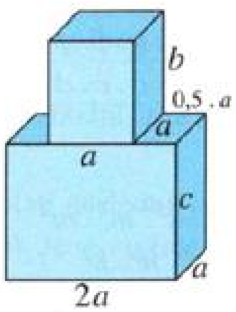
U všech úloh si opět zopakujeme pojmy jednočlen, mnohočlen, počet členů.

Vyučovací hodina 7

Téma hodiny: Sčítání mnohočlenů

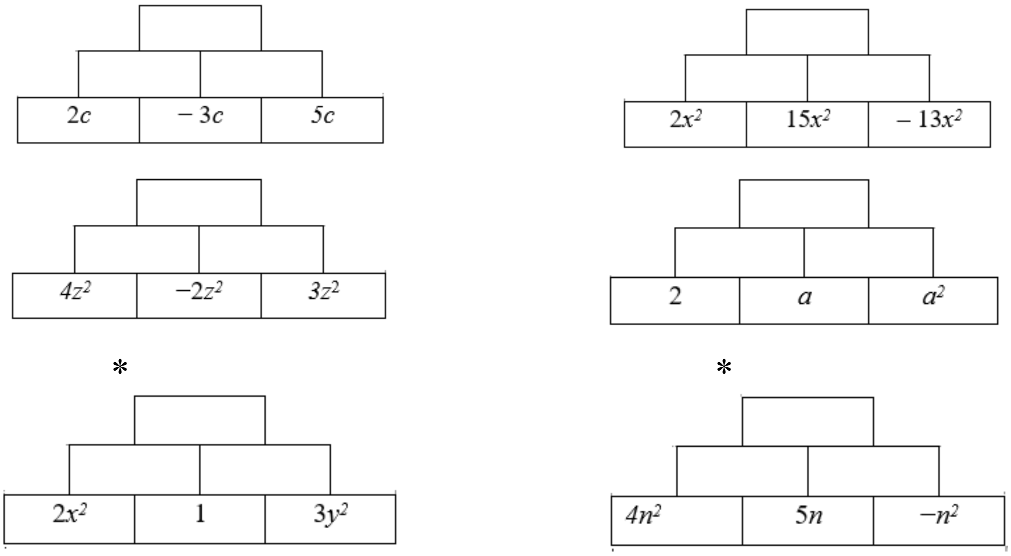
Cíl hodiny: Žáci si zopakují sčítání a odčítání jednočlenů a své zkušenosti použijí při sčítání mnohočlenů.

Rozcvička: Těleso na obrázku je složeno ze dvou kvádrů. Popiš geometrický význam daných výrazů. Tuto úlohu jsem převzala z učebnice pro 8. ročník autorů O. Odvárko a J. Kadleček, nakl. Prometheus (s. 65).



a	$2 \cdot a^2$
$4 \cdot a$	$0{,}5 \cdot a \cdot a$
a^2	$a \cdot a \cdot b$
$2 \cdot a + 2 \cdot b$	$2 \cdot a^2 \cdot c$
$a \cdot b$	$4 \cdot a^2 + 4 \cdot a \cdot b + 6 \cdot a \cdot c$
$6 \cdot a$	$a^2 \cdot b + 2 \cdot a^2 \cdot c$

Úloha 1: Urči výraz na vrcholu sčítací pyramidy.



U prvních třech pyramid se jedná o sčítání jednočlenů. U dalších třech pyramid se jedná o sčítání mnohočlenů. Předpokládám, že se objeví diskuse o tom, že pyramidy jsou „jiné“.

Úloha 2: Urči výsledný mnohočlen. K řešení použij modelování s algebraickými dlaždicemi.

a) $(x + 3) + (2x + 1) =$

b) $(5k + 7) + (2k - 2) =$

c) $(v - 9) + (4 - 2v) =$

*d) $(2t - 1) + (- 3t + 7) =$

*e) $(- u + 4) + (- 2u - 1) =$

U první úlohy si společně ukážeme postup, jak používat algebraické dlaždice.

Úloha 3: Urči výsledný mnohočlen. K řešení použij modelování s algebraickými dlaždicemi.

a) $(x^2 + 2x + 3) + (2x^2 + 5x + 2) =$

b) $(5x^2 - 6x - 2) + (x^2 + 7x + 3) =$

c) $(2x^2 - 2x - 7) + (4x^2 - x + 1) =$

*d) $(- x^2 + 3x - 1) + (2x^2 + x + 4) =$

*e) $(3x^2 - 4x - 5) + (- 2x^2 - 5x - 2) =$

U dalších úloh nechám na zvážení žáků, zda budou používat algebraické dlaždice.

Úloha 4: Doplň.

*Úloha 5: Zadané výrazy zjednoduš.

a) $(7x - 3y) + (x - 2xy + 8y) + (5xy - 4y) =$

b) $(5 - 2a - 3b) + (17a - 9b) + (3b - 11) =$

c) $(5a^2 - ab - 3b^2) + (2b^2 - 3ab) + (a^2 + 6ab) =$

d) $(x^2 - 3xy) + (2x^2 + 5xy) + (-2xy - x^2) =$

Vyučovací hodina 8

Téma hodiny: Odčítání mnohočlenů

Cíl hodiny: Žáci si zopakují sčítání mnohočlenů a své zkušenosti použijí při odčítání mnohočlenů.

Rozcvička: Rozhodni, zda je daný výraz mnohočlen, nebo jednočlen. Zakroužkuj písmeno v odpovídajícím sloupečku a zjisti tajenku (z pracovního sešitu *Hravá matematika pro 8. ročník*, nakl. Taktik, s. 37).

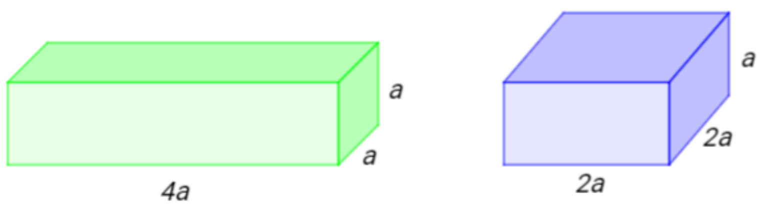
Výraz	Jednočlen	Mnohočlen		Výraz	Jednočlen	Mnohočlen
$0{,}5a + 3b$	J	K		b	C	M
$\frac{3}{5}x$	O	A		$\sqrt{x \cdot y}$	I	Á
$-2x^2 \cdot y^2 \cdot z$	E	K		$x^2 \cdot y^2 \cdot z + 3$	T	E
$5a - bcd$	S	F		$d + e - 3f$	E	N
$-3{,}257$	I	E		8	T	L

Následují otázky k zopakování pojmů koeficient, proměnná, počet členů v mnohočlenu, číselný výraz, výraz s proměnnou.

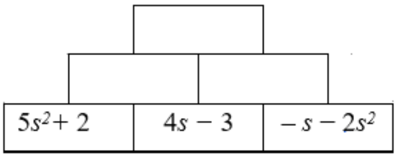
Úloha 1: Jsou dány dva kvádry.

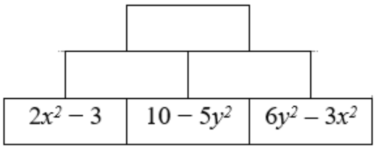
a) Zapiš obsahy všech stěn zadaných kvádrů a pak urči jejich povrch.

b) Porovnej povrchy obou kvádrů.



Úloha 2: Urči mnohočlen na vrcholu sčítací pyramidy.





Úloha 3: Urči výsledný mnohočlen. K řešení použij modelování s algebraickými dlaždicemi.

a) $(x + 3) - (2x + 1) =$

b) $(5t - 1) - (3t + 7) =$

c) $(v + 9) - (4 - 2v) =$

*d) $(-u + 4) - (-3u - 1) =$

*e) $(-4y - 2) - (-2y + 2) =$

Úloha 4: Urči výsledný mnohočlen. K řešení použij modelování s algebraickými dlaždicemi.

a) $(x^2 + 2x + 3) - (2x^2 + 5x + 2) =$

b) $(5x^2 - 6x - 2) - (x^2 + 7x + 3) =$

c) $(x^2 + 3x + 1) - (-3x^2 - x - 4) =$

*d) $(2x^2 - 2x - 7) - (-4x^2 - x + 1) =$

*e) $(3x^2 + 4x + 5) - (-2x^2 - 5x - 2) =$

Vyučovací hodina 9

Téma hodiny: Sčítání a odčítání mnohočlenů

Cíl hodiny: Žáci si upevní své znalosti sčítání a odčítání mnohočlenů.

Rozcvička: Doplň čísla do součtové tabulky.

+	11	2	7
3	14		
5			
10			

Součet čísel v žlutých polích je ………………

Součet čísel v modrých polích je ……………

Součet čísel v zelených polích je ……………

Je na jednotlivých součtech něco zajímavého? Co se v jednotlivých součtech skrývá?

Úloha 1: Spoj mnohočleny, které lze upravit na stejný tvar.

$-(15-4x)+(21-3x)-(7-3x)+9$	$(8x-16)+(-3x+4)-(-15+3x)$
$(5-2x)-(4x+8)+9x-(x-6)$	$-(1{,}5x-4)+(4{,}5x-7)-(-5x+8)$
$(2x-6)-(4x-9)-(-5x+4)-(10-5x)$	$17x-(54+26x)-(-13x-42)+20$

Tuto úlohu nechám žáky řešit ve dvojicích. Každý žák bude řešit jeden sloupeček. Obávám se, že slabší žáky by délka mnohočlenů odradila od práce. Naopak dobří počtáři si obvykle vyřeší oba sloupce.

Úloha 2: Doplňte součtovou tabulku. Vybarvěte v ní 3 pole modře, 3 pole zeleně a 3 pole červeně tak, aby součet čísel v červených polích byl stejný jako součet čísel v zelených polích a také stejný jako součet čísel v modrých polích.

+	a	b	c
d	$a+d$		
e			
f			

+	a	b	c
d	$a+d$		
e			
f			

Tato úloha souvisí s úlohou v rozcvičce. Žáci ji budou řešit ve skupinách, aby spolu mohli diskutovat možné strategie.

Vyučovací hodina 10

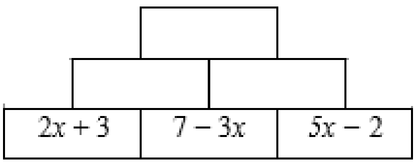
<u>Téma hodiny</u>: Procvičování sčítání a odčítání mnohočlenů

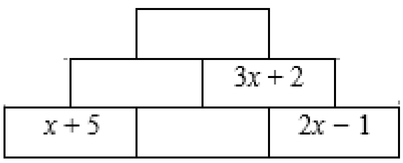
<u>Cíl hodiny</u>: Žáci vyřeší součtové pyramidy.

Rozcvička: Strana čtverce má délku a cm. Urči jeho obvod a obsah. Urči délku strany, obvod a obsah čtverce, jehož strana je: a) o 2 cm delší, b) o 1 cm kratší, *c) dvakrát delší.

Nápověda: K zápisu řešení využij tabulku.

Úloha 1: Doplň součtové pyramidy.





Úloha 2: Doplň součtové pyramidy.

$x + 2$	$3x + 1$	$4 - 2x$	$4x - 5$

$5x + 11$			
	$3x + 5$		
	$2x + 6$		$3 - 5x$

*Úloha 3: Doplň součtovou pyramidu.

$x^2 + 3x + 2$	$3x^2 - 5x - 6$	$4 - 2x - 2x^2$

*Úloha 4: Doplň součtovou pyramidu.

$4x^2 + 3x + 2$			
	$2x^2 + x + 3$		
$x^2 + x + 1$		$5 - 3x - x^2$	

*Úloha 5: Na dvoře je několik ovcí a několik slepic. Dohromady mají *h* hlav. Slepic je *s*. Kolik nohou mají dohromady všechny slepice a ovce?

Vyučovací hodina 11

<u>Téma hodiny</u>: Násobení jednočlenů

<u>Cíl hodiny</u>: Žáci si zopakují význam násobení a počítání s mocninami. Své znalosti využijí při násobení proměnných.

Rozcvička:

1) Rozepiš na násobení

a) 5^2 b) 3^{-3} c) x^3 *d) $x^4 \cdot x^{-2}$ *e) $x^3 \cdot y^{-2}$

2) Rozepiš na sčítání

a) $2 \cdot 3$ b) $4 \cdot x$ c) $2y$ *d) ac *e) b^2

3) Zapiš jako jednu mocninu

a) $2 \cdot 2^3$ b) $3^2 \cdot 3^3$ c) $4^2 + 4^3$ d) $a \cdot a^3$ *e) $b^2 \cdot b^3$ *f) $x^2 \cdot y^3$

Tato rozcvička je zaměřena na připomenutí násobení a práci s mocninami. Žáci mohou spolupracovat ve dvojicích. Na závěr očekávám diskuzi, při které shrneme poznatky, které jsme využili.

Úloha 1: Znázorni graficky.

a) násobení $2 \cdot 3$,

b) násobení $2a \cdot 3a$.

Která vlastnost násobení nám umožňuje danou úlohu spočítat i bez obrázku?

U této úlohy si ukážeme dvě možnosti grafického znázornění. První způsob je náčrt obrázku do sešitu, druhý způsob je zobrazení pomocí algebraických dlaždic. Dále si řekneme, že násobení je komutativní, což je vlastnost násobení, která nám umožňuje změnit pořadí činitelů, takže vynásobíme čísla a pak řešíme proměnné.

Úloha 2: Vynásob.

a) $3 \cdot 5$	b) $c \cdot c$	c) $-2d \cdot 3e$	*d) $0{,}3gh \cdot 4g$
$3a \cdot 5$	$c \cdot (-c)$	$-2d \cdot (-3e)$	$0{,}3gh \cdot 4gh$
$3 \cdot 5b$	$-c \cdot c^2$	$-2d \cdot 3e^3 \cdot d$	$0{,}3g^2h \cdot 4h$
$3a \cdot 5b$	$-c^3 \cdot (-c^2)$	$-2d \cdot 3e^3 \cdot$	$0{,}3g^2h \cdot 0{,}4h^2g^2$

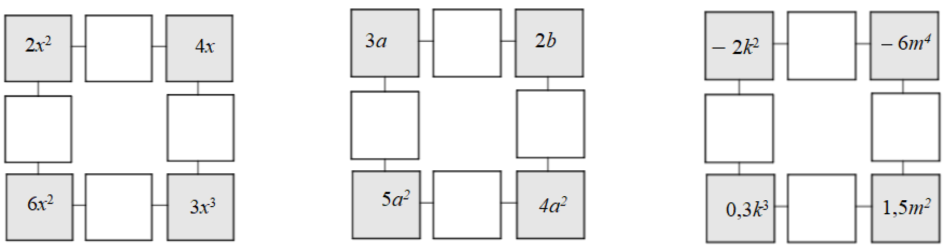
Obě úlohy mohou žáci řešit ve dvojicích.

Vyučovací hodina 12

<u>Téma hodiny</u>: Násobení jednočlenu s mnohočlenem

<u>Cíl hodiny</u>: Žáci si zopakují násobení jednočlenů. Své znalosti rozšíří o násobení mnohočlenů.

Rozcvička: Doplňte součinové čtverce.

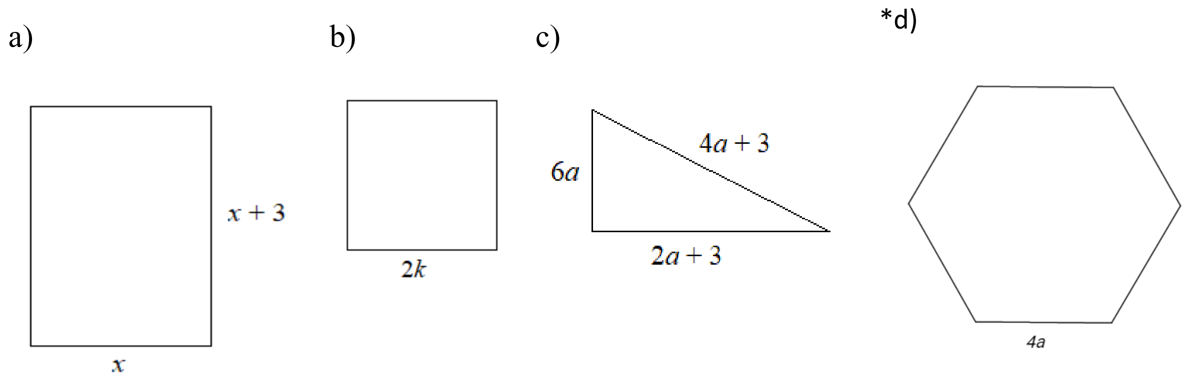


Úloha 1: Znázorni graficky. Vynásob. Využij algebraické dlaždice.

a) $2 \cdot (x + 1)$ b) $y \cdot (y + 2)$ c) $3 \cdot (z - 2)$ d) $k \cdot (k - 3)$

V rámci této úlohy si na grafickém znázornění ukážeme význam pojmu roznásobení závorky.

Úloha 2: Urči obvod a obsah zadaných mnohoúhelníků.



Výsledek zkontroluj dosazením 1 za proměnnou.

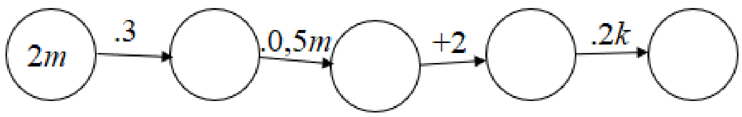
Možným úskalím pro slabší žáky jsou strany bez zapsaného rozměru a obsah trojúhelníku.

Vyučovací hodina 13

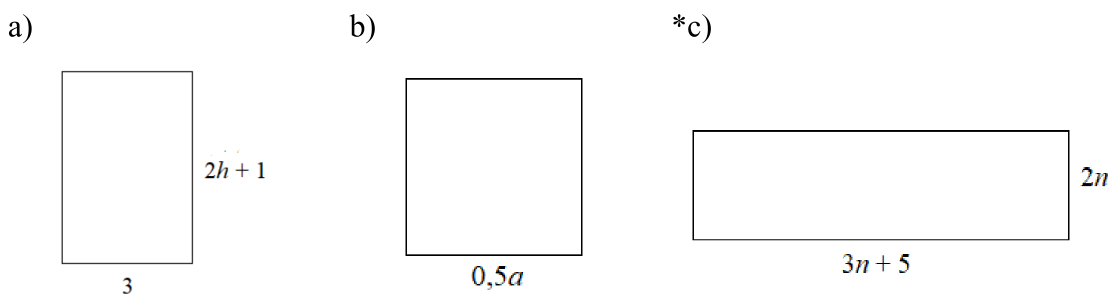
Téma hodiny: Násobení jednočlenu s mnohočlenem

Cíl hodiny: Žáci řeší zadané úlohy, ve kterých prokáží znalost násobení jednočlenu s mnohočlenem.

Rozcvička: Doplňte.



Úloha 1: Urči obsah obrazců.



Úloha 2: Vynásob.

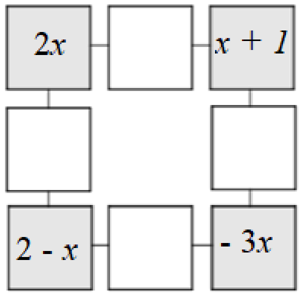
a) $5 \cdot (2 + x)$ b) $(y + 6) \cdot 3$ c) $-4 \cdot (3z + 1)$ d) $(5 + a) \cdot a$

e) $(5 + a) \cdot (-a)$ f) $(11 - 2{,}5h) \cdot (-2)$ *g) $-\frac{1}{3} \cdot (9 - 3k)$ *h) $-0{,}5v \cdot (-2 - 4v)$

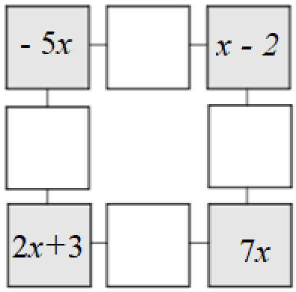
V této úloze očekávám problémy při násobení záporným číslem. Ne všechny úlohy lze modelovat pomocí algebraických dlaždic, očekávám zde dotazy žáků.

Úloha 3: Vyřešte součinové čtverce.

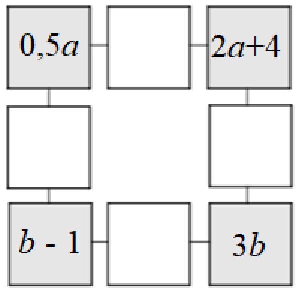
a)



b)



*c)

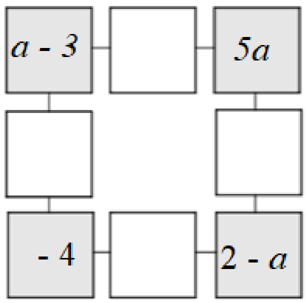


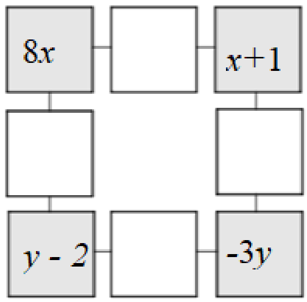
Vyučovací hodina 14

<u>Téma hodiny</u>: Násobení jednočlenu s mnohočlenem

<u>Cíl hodiny</u>: Žáci si prověří své znalosti násobení jednočlenu s mnohočlenem.

Rozcvička: Doplňte.





Na tuto hodinu bude připraveno domino (viz příloha 4). Žáci budou pracovat ve skupinách, rozdělí si stejným dílem kartičky a společně budou hru hrát.

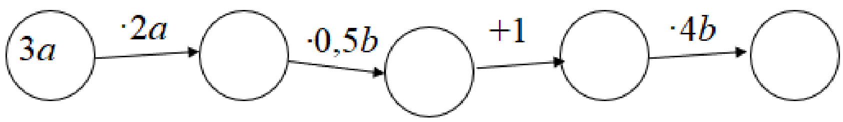
Na závěr hodiny společně vyhodnotíme, jak se žákům dařilo zadaný úkol splnit a co bylo největším problémem.

Vyučovací hodina 15

<u>Téma hodiny</u>: Násobení jednočlenu s mnohočlenem

<u>Cíl hodiny</u>: Žáci aplikují své znalosti z násobení jednočlenu s mnohočlenem z minulých hodin na náročnějších úlohách.

Rozcvička: Doplňte.



Úloha 1: Vynásob.

a) $7 \cdot (3 + x)$ b) $(2y - 1) \cdot 5$ c) $- 2k \cdot (5 + k)$ d) $(6v^2 + 7v) \cdot 2$

e) $(5b + 2a) \cdot 3a$ *f) $- 4z \cdot (0{,}5z - 3)$ *g) $(4y - x) \cdot (- 3y)$ *h) $- 4n \cdot (5np - 2)$

Úlohy a), b), c) lze řešit pomocí algebraických dlaždic, další úlohy již vyžadují zkušenost z řešení předchozích úloh. Podobně tomu bylo i u úlohy 2 v minulé hodině.

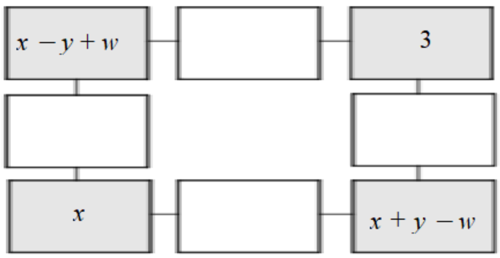
Úloha 2: Vynásobte a upravte na co nejjednodušší tvar.

a) $(5a - 2a + 4) \cdot a$ b) $3 \cdot (9b - 6b - 1)$ *c) $(13cd + 12cd - 5) \cdot c$

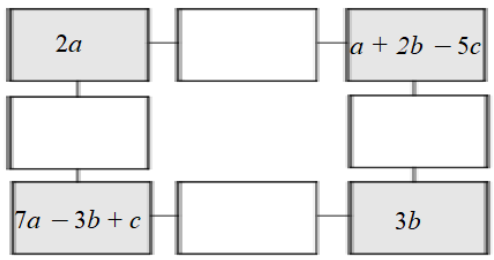
d) $4 \cdot (h^2 + 3h - 4)$ e) $(0{,}5m^2 + 1{,}5m + 4) \cdot 2$ *d) $5t \cdot (3t^2 + 7tv + v^2)$

Úloha 3: Doplňte součinové čtverce.

a)



*b)



Vyučovací hodina 16

<u>Téma hodiny</u>: Násobení mnohočlenu mnohočlenem

<u>Cíl hodiny</u>: Žáci se navrhnou způsob, jak násobit mnohočlen mnohočlenem a aplikují ho.

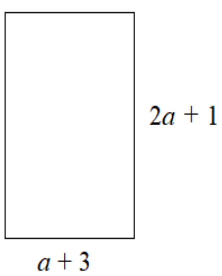
Rozcvička: Vypočítejte.

a) $(3a - 1) \cdot a + 4(2 - a)$ b) $3(b - 2) - 2(b - 4) + 5$

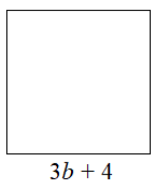
c) $6tu(t - 2) + t^2u + 7tu$ *d) $(ax^2 - bx + a) \cdot x - (ax^3 - bx^3 - ax)$

Úloha 1: Urči obvod a obsah mnohoúhelníků.

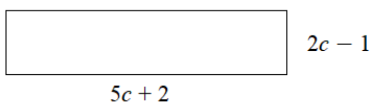
a)



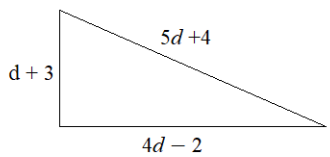
b)



c)



*d)



Pomocí této úlohy si žáci osvěží sčítání mnohočlenů při určování obvodu čtverce, obdélníku a trojúhelníku. Nové je násobení mnohočlenů, které budou žáci používat při určování obsahů. Při řešení obsahů mnohoúhelníků žáci využijí algebraické dlaždice.

Úloha 2:

a) $(x + 2) \cdot (x + 5)$ b) $(2y + 1) \cdot (y + 4)$ c) $(z + 3) \cdot (z - 1)$

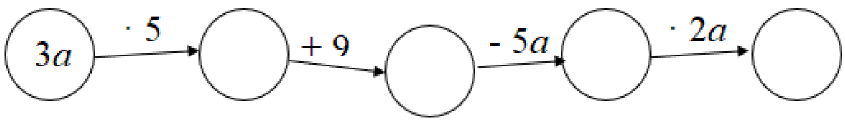
d) $(3s - 2) \cdot (s + 6)$ *e) $(4v - 1) \cdot (v - 3)$ *f) $(2u - 5) \cdot (4 - 3u)$

Vyučovací hodina 17

<u>Téma hodiny</u>: Násobení mnohočlenu mnohočlenem

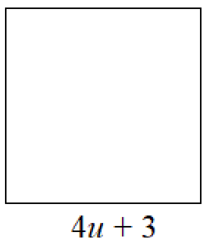
<u>Cíl hodiny</u>: Žáci násobí mnohočlen mnohočlenem.

Rozcvička: Doplňte.

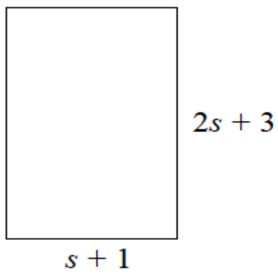


Úloha 1: Určete obsah čtverce a obdélníků

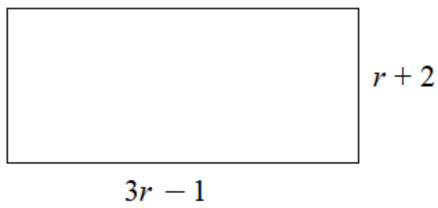
a)



b)

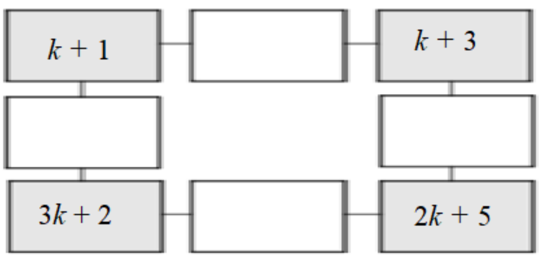


*c)

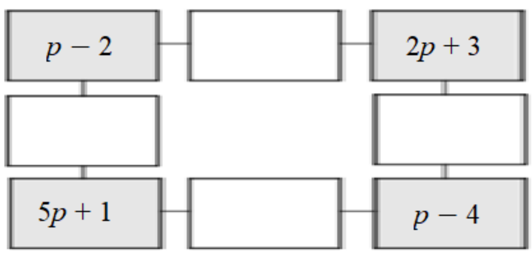


Úloha 2: Doplň součinové čtverce.

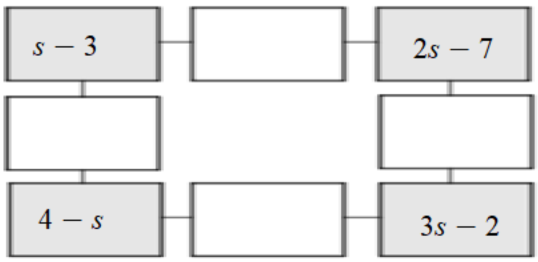
a)



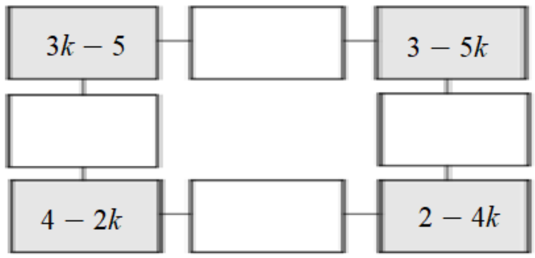
b)



c)



*d)

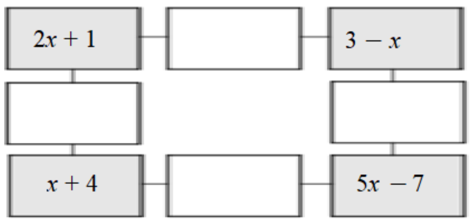


Vyučovací hodina 18

<u>Téma hodiny</u>: Násobení mnohočlenu mnohočlenem

<u>Cíl hodiny</u>: Žáci zvládnou náročnější úlohy na násobení mnohočlenu mnohočlenem.

Rozcvička: Doplňte součinový čtverec.



Úloha 1: Vynásobte dvojčleny.

a) $(0{,}5 - x) \cdot (3x - 2)$

b) $(5 - 3x) \cdot (0{,}2x + 1)$

c) $(0{,}7 + 0{,}3x) \cdot (1 - 2x)$

*d) $(0{,}5x + 1{,}5y) \cdot (3x - 0{,}2y)$

Úloha 2: Vynásobte a vzniklý součin zjednodušte.

a) $(x^2 + 2x + 3) \cdot (x + 5)$

b) $(x - y + 2) \cdot (x + y)$

c) $(xy + 2x - y) \cdot (2x - 3y)$

*d) $(xy - y) \cdot (2y + x - 1)$

Úloha 3: Výraz upravte na co nejjednodušší tvar.

a) $5x \cdot [(x + 2) - (x - 5)]$

b) $[(x - 2)\,(x + 5) - 3] \cdot 4$

c) $(3x - 7) \cdot [(x + 2) - x(3 - x)]$

*d) $(2x + 3)\,(x - 5) - (x + 2)\,(7x - 4)$

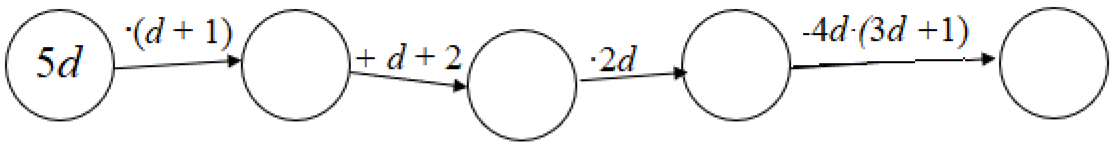
Vyučovací hodina 19

<u>Téma hodiny</u>: Násobení mnohočlenu mnohočlenem

<u>Cíl hodiny</u>: Žáci využijí znalostí násobení mnohočlenu mnohočlenem při hře domino (příloha 5).

Každá skupina má jiné domino, po dohrání si mohou, pokud zbyde čas, karty s dominem vyměnit.

Rozcvička: Doplňte.

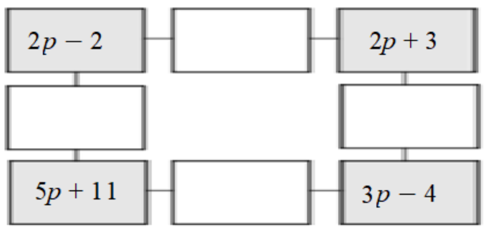


Vyučovací hodina 20

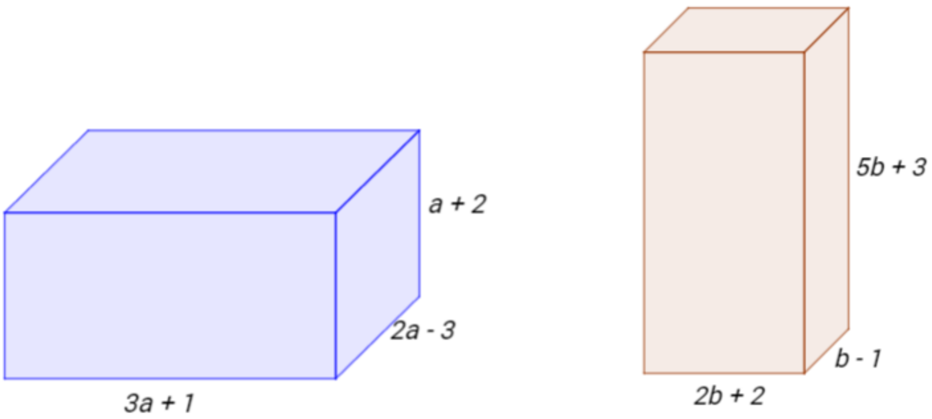
<u>Téma hodiny</u>: Násobení mnohočlenu mnohočlenem

<u>Cíl hodiny</u>: Žáci vyřeší náročnější úlohy na násobení mnohočlenu mnohočlenem.

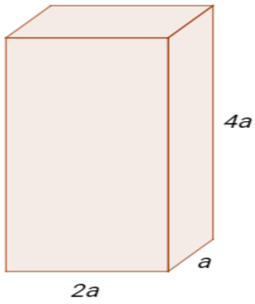
Rozcvička: Doplňte.



Úloha 1: Zjistěte objem kvádrů.

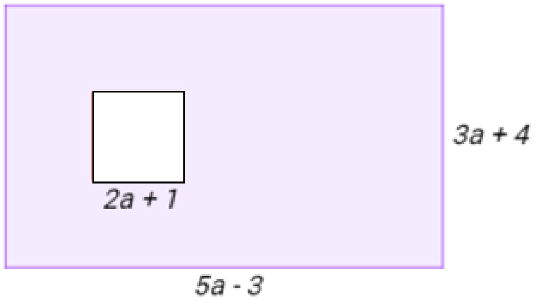


Úloha 2: O kolik se změní objem kvádru, když všechny jeho strany zvětšíme o 1?

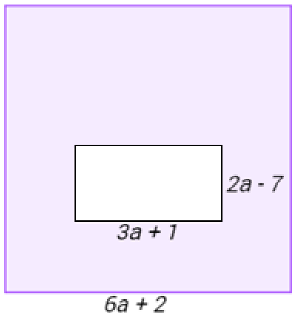


Úloha 3: Urči obsah fialového obrazce.

a)



b)



Žáci budou při řešení úloh spolupracovat ve dvojicích.

Vyučovací hodina 21

Téma hodiny: Druhá mocnina dvojčlenu $(a + b)^2$

Cíl hodiny: Žáci objeví vzorec $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Rozcvička: Doplňte tabulku.

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a^2										
a	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a^2										

Úloha: Urči obsah čtverců, jejichž délka strany se postupně zvětšuje. Vše zapiš do tabulky.

Použij algebraické dlaždice.

Délka strany	a	$a + 1$	$a + 2$	$a + 3$	$a + 4$	$a + 7$	$a + 10$
Obsah							

Pozoruj, jak se v závislosti na délce strany mění obsah čtverce.

Jaký bude obsah, zvětšíme-li délku strany o *b?*

Tato hodina bude věnována objevování vzorce na druhou mocninu dvojčlenu. Žáci budou pracovat ve skupinách. Každá skupina na konci hodiny prezentuje závěry svého bádání.

Vyučovací hodina 22

Téma hodiny: Druhá mocnina dvojčlenu $(a + b)^2$

Cíl hodiny: Žáci získají řešením úloh s druhou mocninou dvojčlenu s pomocí algebraických dlaždic potřebné zkušenosti.

Rozcvička: Hra Matematický král. Žáci se postaví. Postupně jednotlivým dvojicím žáků učitel řekne číslo do 20. Žáci mají za úkol říct druhou mocninu zadaného čísla, kdo dříve odpoví, zůstává stát. Pomalejší nebo chybující žák si sedá. Hra končí, když zůstane stát poslední žák.

Úloha 1: Použijte algebraické dlaždice. Porovnejte jednotlivá řešení.

a) $(a + 1)^2$ $(b + 2)^2$ $(c + 3)^2$ *$(d + 4)^2$

b) $(1 + x)^2$ $(2 + x)^2$ $(3 + x)^2$ *$(4 + x)^2$

Žáci pracují ve skupině, aby mohli diskutovat nad jednotlivými řešeními mezi sebou.

Úloha 2: Umocněte dané výrazy.

a) $(7 + y)^2$ $(y + 9)^2$ $(13 + y)^2$ *$(y + 40)^2$

b) $(2r + 3)^2$ $(4 + 3s)^2$ $(4t + 2)^2$ *$(5 + 2u)^2$

Žáci pracují samostatně, ale mohou v případě potřeby diskutovat ve dvojicích. Opět je zde důležitá závěrečná diskuse nad jednotlivými řešeními. Proč to tak vyšlo? Na čem výsledek záleží?

Úloha 3: Umocněte dané výrazy.

a) $(0,7 + y)^2$ $(y + 0,9)^2$ *$(1,3 + y)^2$ *$(y + 4,1)^2$

a) $\left(\frac{1}{2} + z\right)^2$ $\left(\frac{z}{3} + 1\right)^2$ *$\left(\frac{3}{4} + 2z\right)^2$ *$\left(\frac{2}{5} + \frac{z}{3}\right)^2$

Vyučovací hodina 23

Téma hodiny: Druhá mocnina dvojčlenu $(a + b)^2$

Cíl hodiny: Žáci aplikují získané zkušenosti a vyřeší náročnější úlohy s druhou mocninou dvojčlenu.

Rozcvička: Na začátku hodiny žáci vytvoří trojice. První trojice se posadí vedle sebe a za ní další jako v autobuse. Vzhledem k prostorovým možnostem žáci vytvoří tímto způsobem dvě řady. Učitel má připraveny druhé mocniny různých dvojčlenů na kartách (v dostatečné velikosti, aby je viděli všichni žáci). Učitel zadá úlohu první trojici. První žák umocní první člen, druhý žák doplní znaménko a druhý člen, třetí žák doplní znaménko a třetí člen. Pokud všichni v trojici odpoví správně, získávají bod. Skupina žáků, jenž získá nejvíce bodů, vyhrává. Po prvním kole si žáci o jedno místo přesednou. Proběhne další kolo. Je důležité, aby proběhla alespoň tři kola, aby se žáci mohli v odpovědích vystřídat.

Úloha 1: Na volná místa doplňte výrazy tak, aby platila rovnost:

a) $(a + \_\_)^2 = a^2 + 2a + \_\_$ $(b + \_\_)^2 = b^2 + 8b + \_\_$

b) $(\_\_ + 5)^2 = \_\_ + 10c + 25$ $(8 + \_\_)^2 = 64 + 16d + \_\_$

*c) $(\_\_ + 1)^2 = \_\_ + 4e + 1$ $(f + \_\_)^2 = f^2 + f + \_\_$

Úloha 2: Rozložte mnohočlen na součin. Použijte algebraické dlaždice.

a) $a^2 + 2a + 1$ $a^2 + 4a + 4$ $a^2 + 8a + 16$

b) $4b^2 + 4b + 1$ $9b^2 + 6b + 1$ $9b^2 + 12b + 4$

*c) $81c^2 + 72c + 16$ $c^2 + 0{,}6c + 0{,}09$ $c^2 + c + \frac{1}{4}$

U všech úloh bude vedena diskuze nad různými strategiemi řešení.

Vyučovací hodina 24

<u>Téma hodiny</u>: Druhá mocnina dvojčlenu $(a - b)^2$

<u>Cíl hodiny</u>: Žáci by měli objevit vzorec $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Rozcvička: Hra Matematický král s druhou mocninou čísel (viz vyučovací hodina 22). Protože jsme hru již jednou hráli, přidám i druhou mocninu „snadných“ desetinných čísel (např. 0,1; 0,2; 0,3).

Úloha: Urči obsah čtverců, jejichž délka strany se postupně zmenšuje. Vše zapiš do tabulky. Použij algebraické dlaždice.

Délka strany	a	$a - 1$	$a - 2$	$a - 3$	$a - 4$	$a - 7$	$a - 10$
Obsah							

Pozoruj, jak se v závislosti na délce strany mění obsah čtverce.

Jaký bude obsah, zmenšíme-li délku strany o *b?*

Jak souvisí řešení této úlohy s úlohou, ve které jsme délku strany čtverce zvětšovali?

Tato hodina bude věnována objevování vzorce na druhou mocninu dvojčlenu $(a - b)^2$. Žáci budou pracovat ve skupinách. Každá skupina na konci hodiny prezentuje závěry svého bádání.

Vyučovací hodina 25

Téma hodiny: Druhá mocnina dvojčlenu $(a - b)^2$

Cíl hodiny: Žáci budou řešit s pomocí algebraických dlaždic úlohy s druhou mocninou dvojčlenu. V této hodině získají potřebné zkušenosti při řešení.

Rozcvička: Hra Matematický král s druhou mocninou čísel (viz vyučovací hodina 22 a 24). Protože jsme hru již vícekrát hráli, přidám opět i druhou mocninu „snadných“ desetinných čísel (např. 0,1; 0,2; 0,3) a nově i zlomků.

Úloha 1: Umocněte. Použijte algebraické dlaždice. Porovnejte jednotlivá řešení.

a) $(a - 1)^2$ $(b - 2)^2$ $(c - 3)^2$ * $(d - 4)^2$

b) $(1 - x)^2$ $(2 - x)^2$ $(3 - x)^2$ *$(4 - x)^2$

Žáci pracují ve skupině, aby mohli diskutovat nad jednotlivými řešeními mezi sebou.

Úloha 2: Umocněte dané výrazy.

a) $(7 - y)^2$ $(y - 9)^2$ $(13 - y)^2$ * $(y - 40)^2$

b) $(2r - 3)^2$ $(4 - 3s)^2$ $(4t - 2)^2$ *$(5 - 2u)^2$

Žáci pracují samostatně, ale mohou v případě potřeby diskutovat ve dvojicích. Opět je zde důležitá závěrečná diskuse nad jednotlivými řešeními. Proč to tak vyšlo? Na čem výsledek záleží?

Úloha 3: Umocněte dané výrazy.

a) $(0{,}7 - y)^2$ $(y - 0{,}9)^2$ *$(1{,}3 - y)^2$ *$(y - 4{,}1)^2$

b) $\left(\frac{1}{2} - z\right)^2$ $\left(\frac{z}{3} - 1\right)^2$ *$\left(\frac{3}{4} - 2z\right)^2$ *$\left(\frac{2}{5} - \frac{z}{3}\right)^2$

Vyučovací hodina 26

Téma hodiny: Druhá mocnina dvojčlenu $(a - b)^2$

Cíl hodiny: Žáci vyřeší náročnější úlohy s druhou mocninou dvojčlenu.

Rozcvička: Proběhne stejná aktivita jako při rozcvičce, která je popsána ve 23. vyučovací hodině. Žáky oblíbený „autobus“. Na připravených kartách budou různé úlohy na druhou mocninu dvojčlenu $(a - b)^2$.

Úloha 1: Na volná místa doplňte výrazy tak, aby platila rovnost:

a) $(a - \_\_\_)^2 = a^2 - 2a + \_\_\_$ $\qquad$ $(b - \_\_\_)^2 = b^2 - 8b + \_\_\_$

b) $(\_\_\_ - 5)^2 = \_\_\_ - 10c + 25$ $\qquad$ $(8 - \_\_\_)^2 = 64 - 16d + \_\_\_$

*c) $(\_\_\_ - 1)^2 = \_\_\_ - 4e + 1$ $\qquad$ $(f - \_\_\_)^2 = f^2 - f + \_\_\_$

Úloha 2: Rozložte mnohočlen na součin. Použijte algebraické dlaždice.

a) $a^2 - 2a + 1$ $\qquad$ $a^2 - 4a + 4$ $\qquad$ $a^2 - 8a + 16$

b) $4b^2 - 4b + 1$ $\qquad$ $9b^2 - 6b + 1$ $\qquad$ $9b^2 - 12b + 4$

*c) $81c^2 - 72c + 16$ $\qquad$ $c^2 - 0{,}6c + 0{,}09$ $\qquad$ $c^2 - c + \frac{1}{4}$

Vyučovací hodina 27

Téma hodiny: Součin $(a - b) \cdot (a + b)$

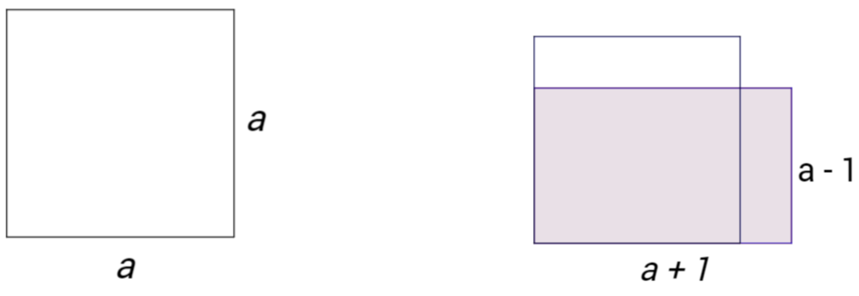
Cíl hodiny: Žáci vyřeší s pomocí algebraických dlaždic zadané úlohy a objeví vztah $(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2$.

Rozcvička: Mysli si libovolné číslo. Přičti k němu jedničku. Výsledek vynásob dvěma, k tomu opět přičti jedničku a výsledek vynásob dvěma a nyní od tohoto čísla odečti 6. Kolik ti vyšlo?

Žáci postupně říkají, co jim vyšlo, a učitel jim říká číslo, které si mysleli. Úkol pro žáky zní: Jak může učitel vědět, jaké číslo si kdo myslí?

Úvod: V minulých hodinách jsme řešili mocninu dvojčlenu, což znamená, že vynásobíme dvojčlen tím samým dvojčlenem. Ukazovali jsme si, že tímto způsobem můžeme určit obsah čtverce. Vzali jsme základní čtverec s délkou strany *a* a tuto délku jsme buď zvětšovali, nebo zmenšovali a sledovali jsme, jak se mění obsah čtverce. Zkusíme udělat experiment. Vezmeme čtverec s délkou strany *a,* jednu dvojici rovnoběžných stran zvětšíme a druhou dvojici rovnoběžných stran o stejnou délku zmenšíme. Vznikne nám obdélník. Určíme obsah tohoto obdélníku.

Názorný obrázek:



Úloha 1: S pomocí algebraických dlaždic vyřešte. Porovnejte jednotlivá řešení.

$(a-1)(a+1)$ $(a-2)(a+2)$ $(a+3)(a-3)$ *$(a+4)(a-4)$

Žáci pracují ve skupině, aby mohli diskutovat nad jednotlivými řešeními mezi sebou.
Každá skupina po vyřešení prezentuje svoje výsledky. Na závěr by žáci měli dojít ke vztahu $(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2$.

Očekávám dotazy, jak souvisí výsledek s obsahem obdélníku, o kterém jsme na začátku mluvili.
Pokud zbyde čas, žáci budou řešit další úlohy.

$(a-10)(a+10)$ $(3+a)(3-a)$ $(a+5)(5-a)$ $(9+a)(9-a)$

Vyučovací hodina 28

<u>Téma hodiny</u>: Součin $(a-b)\cdot(a+b)$

<u>Cíl hodiny</u>: Žáci získají s pomocí algebraických dlaždic potřebné zkušenosti s řešením úloh typu $(a-b)\cdot(a+b)$.

Rozcvička: Žáci dostanou do skupin krátké domino (příloha 6), na kterém budou na jedné straně součiny a mocniny typu $(a-b)\cdot(a+b)$, $(a-b)^2$, $(a+b)^2$. Na druhé straně zde budou odpovídající mnohočleny.

Úloha 1: Výrazy uprav. Výsledek zapiš jako dvojčlen.

a) $(x+7)(x-7)$ $(y-6)(y+6)$ $(5+z)(z-5)$
b) $(3u-4v)(3u+4v)$ $(5s+10r)(10r-5s)$ $(2a+7b)(2a-7b)$
*c) $(c^2+2)(c^2-2)$ $(d-0{,}6)(d+0{,}6)$ $(\frac{1}{4}+2e)(2e-\frac{1}{4})$

Tuto úlohu řeší žáci samostatně. Zkontrolují ve dvojicích. Pokud by měli různé výsledky, diskutují o nich společně.

Úloha 2: Na volná místa doplňte výrazy tak, aby platila rovnost.

a) x^2- ___ = (___ + ___)$(x-5)$ ___ $-\,y^2=$ (___ + ___)(20 − ___)
b) ___ $-\,36k^2=$ (___ + ___)($5k-$ ___) ___ − ___ = $(9v+u)$(___ $-\,u$)
*c) ___ $-\,121a^2=$ (___ + ___)($5b^2-$ ___) $0{,}01x^4-$ ___ = (___ + ___)(___ $-\,0{,}2y$)

U této úlohy mohou žáci pracovat ve dvojicích a diskutovat o řešení.

Úloha 3: Rozložte dvojčlen na součin.

a) x^2-9 y^2-25 $100-z^2$
b) $4u^2-36$ $121-49v^2$ $16r^2-81s^2$
*c) $(9e^2-\frac{1}{4})$ $-16p^2+25$ $\frac{16}{49}-0{,}25x^2y^2$

Vyučovací hodina 29

Téma hodiny: Procvičování výrazů

Cíl hodiny: Žáci vyřeší ve skupině různorodé úlohy, tím si prohloubí již nabyté znalosti.

Žáci se rozdělí do skupin. Budou řešit 4 úlohy, na každou úlohu mají 8 minut. Úlohy budou dostávat postupně. Ve skupině si musí rozdělit práci, aby v daném časovém úseku úlohu vyřešili.

Úloha 1: Urči hodnotu výrazu pro $x = 11$. Za patřičná čísla dosaď písmena z tabulky níže a vyřeš tajenku. Klezlová (2009)

Výraz	*hodnota výrazu*	*tajenka*
$(x-5)\cdot(x+3)=$		
$x\cdot(x-23)=$		
$x^2-15x+4=$		
$x\cdot(15-3x)=$		
$x^3-4x^2-5x+15=$		
	Xxx	xxx
$(x+1)\cdot(x-9)=$		
$17\cdot(x-4)=$		
$x^2-5x-26=$		
$-x^2+9x-8=$		

A	E	O	U	Š	L	H	R	V	Z	K	P
-777	65	40	50	84	132	24	119	-73	18	-132	56

Úloha 2: Jede Pepíček s babičkou vlakem a povídá ji: „Babi, koukni se na tu množinu kraviček, co se pasou na louce!“ „Co to povídáš, Pepíčku, jaká množina kraviček? Vždyť tam žádné nejsou?“ „Babi, ale to je…“

Dokončení anekdoty najdeš, pokud správně vyřešíš úlohy a přiřadíš ke každému výslednému číslu příslušné písmeno z níže přiložené tabulky. Klezlová (2009)

Zadání:	Řešení:	Tajenka:
$3c^2(c-d^2)(c+d^2)=$		
$(7e+2ef^2)^2-5e^2=$		
$[(3e-5)^2-(3e+7)^2]:3=$		
$3(b^4-5)(b^4+5)+25=$		
$4(x^2-1)(x^2+1)-4(x^4-4)=$		
$(x-y)^2+(x+y)^2-2x^2=$		
$-[38e+15f-(40e-10+50f)+35f-2]=$		
xxx	**xxx**	**xxx**
$3cd-3b^2c-5(3ac-3cd)-3(ac-b^2c)=$		
$(8x-y)^2-[(8x-y)(8x+y)]+16xy=$		
$-[-8xy(x-8y)^2-2xy(7y-5x)^2]=$		
$[(x-y)^2-(2x-y)^2]^2=$		
$7pq(8qp+8p^2)=$		
$2(y-9x)^2-9x(-4y+18)=$		
$12st+3s(t+7)-21(u^2-s)=$		

P	B	I	A	R
$3c^4-3c^2d^4$	47	$56p^2(q^2+1)$	$15st-21u^2$	$4e^2(11+7f^2+f^4)$
M	L	K	N	O
$18c(d-a)$	$81p^4-49q^6$	$13i^4j^3-5kl$	$2y^2$	$2xy(28x^2+134xy-305y^2)$

Z	Á	E	D	Ž
$3b^8 - 50$	$4e - 8$	$38cd^2(15c^2 - 3d^4)$	12	$9x^4 - 12x^3y + 4x^2y^2$

Úloha 3: Najděte čtveřice kartiček, na kterých jsou zapsány výrazy, které jsou po úpravě stejné.

Například: $(b + b)(a + b) = ab + ab + b^2 + b^2 = 2ab + 2b^2 = 2b \cdot (a + b)$

Každá skupina dostane sadu kartiček, které má k sobě přiřadit tak, aby přiřazení odpovídalo zadání.

Úloha 4: Poslední činností je algebraické domino (příloha 4, 5, 6), které je u žáků oblíbené.

Vyučovací hodina 30

Téma hodiny: Test a reflexe znalostí

Cíl hodiny: Žáci samostatně vyřeší test, který bude na 30 minut, a sami vyhodnotí, jak ho zvládli.

Vyučovací hodina 31

Téma hodiny: Dělení jednočlenů jednočlenem

Cíl hodiny: Žáci objeví dělení jednočlenů jednočlenem.

Rozcvička: Násobení jednočlenů formou hry Matematický král.

Násobení jednočlenů při rozcvičce představuje úvod k dělení jednočlenů jednočlenem.

Úkol: Vymyslete podobné úlohy, jako byly v rozcvičce, ale na dělení. Každá skupina vymyslí čtyři úlohy a seřadí je od nejlehčího po nejtěžší.

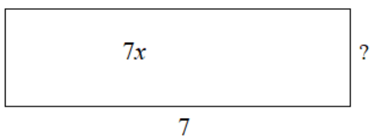
Žáky nechám pracovat ve skupinách. Každá skupina zapíše své úlohy na tabuli. Na jednom příkladu vysvětlí ostatním, jak postupovali. Očekávám různé strategie.

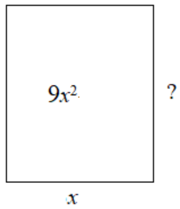
Vyučovací hodina 32

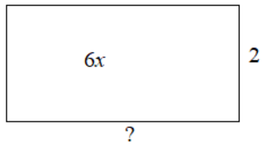
Téma hodiny: Dělení jednočlenů jednočlenem

Cíl hodiny: Žáci dělí jednočleny jednočlenem.

Rozcvička: Místo otazníku doplňte výraz. Vymodelujte pomocí algebraických dlaždic. Vymyslete podobnou úlohu.







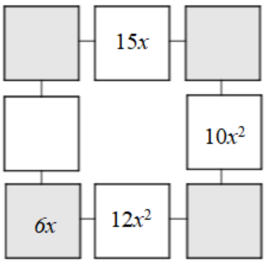
Úloha 1: Vyřešte. Můžete použít algebraické dlaždice.

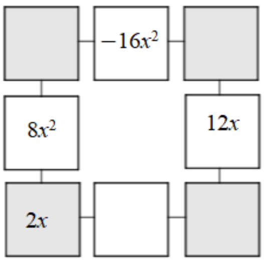
a) $9x : 9$ $\quad$ $9x : 3$ $\quad$ $9x : x$ $\quad$ $9x : 9x$

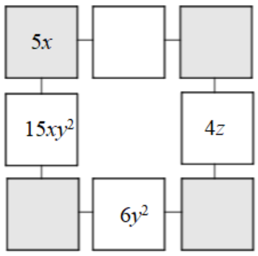
b) $5y^2 : 5$ $\quad$ $5y^2 : 5y$ $\quad$ $5y^2 : y^2$ $\quad$ $5y^2 : 5y^2$

c) $-6z^2 : (-6)$ $\quad$ $-6z^2 : 6z$ $\quad$ $-6z^2 : (-2z)$ $\quad$ $-6z^2 : 6z^2$

Úloha 2: Doplňte součinové čtverce.





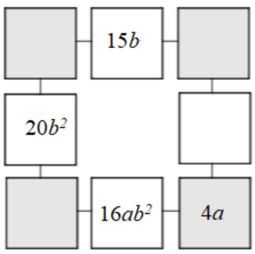


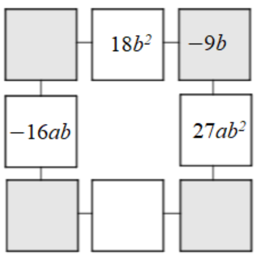
Vyučovací hodina 33

Téma hodiny: Dělení mnohočlenů jednočlenem

Cíl hodiny: Žáci rozšíří své znalosti z dělení jednočlenů jednočlenem na dělení mnohočlenů jednočlenem.

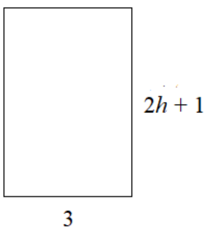
Rozcvička: Doplňte.

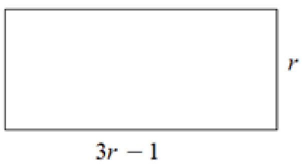


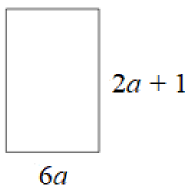


Úloha 1: Doplňte

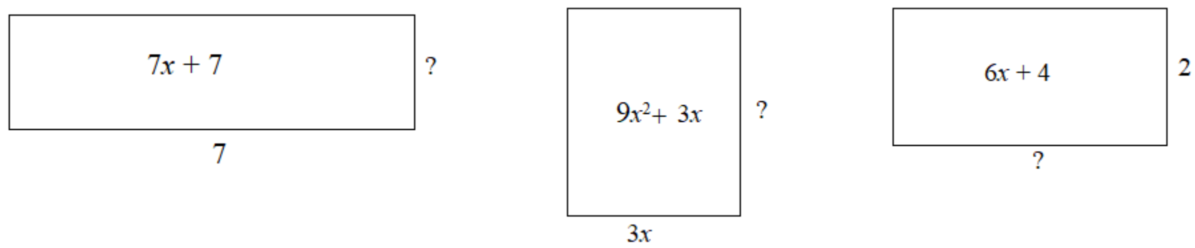
a) obsahy obdélníků







b) chybějící údaje



K řešení můžete použít algebraické dlaždice.

Žáci pracují ve skupinách. Na závěr každá skupina prezentuje výsledky a proběhne diskuze nad způsoby řešení.

Pokud od žáků v diskuzi nezazní souvislosti s minulou hodinou, budu klást otázky typu:

Jak souvisí předcházející úloha s tím, co jsme dělali minulou hodinu?

Lze zapsat ke každému obrázku matematický zápis řešení?

Vyučovací hodina 34

<u>Téma hodiny</u>: Dělení mnohočlenů jednočlenem

<u>Cíl hodiny</u>: Žáci procvičují dělení mnohočlenů jednočlenem.

Rozcvička: Máte obdélníky o obsazích a) $15x^2$, b) $35x$, c) $10x^2 + 5x$, d) $25x^2 + 20x$. Všechny obdélníky mají jednu stranu délky $5x$. Kolik měří strany obdélníků, které jsou na tuto stranu kolmé?

Na tuto úlohu lze navázat dalšími otázkami. Jaký obsah mají všechny obdélníky dohromady? Když tyto obdélníky seřadíme do jedné řady tak, že se dotýkají stranou $5x$, jaká bude délka této řady?

Úloha 1: Vyřešte.

a) $(2a^2 + 4a) : 2$ $\quad$ $(2a^2 + 4a) : a$ $\quad$ $(2a^2 + 4a) : 2a$

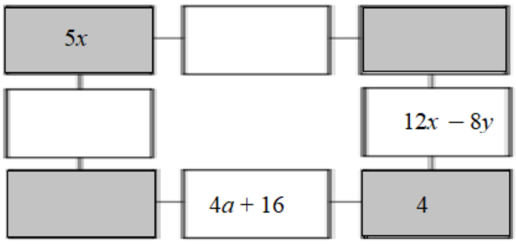
b) $(3b^2 - 12b) : 3$ $\quad$ $(3b^2 - 12b) : b$ $\quad$ $(3b^2 - 12b) : 3b$

c) $(7c^2 - c) : c$ $\quad$ $(5x^2y + 10x) : 5x$ $\quad$ $(8k^2l + 6kl^2) : 2kl$

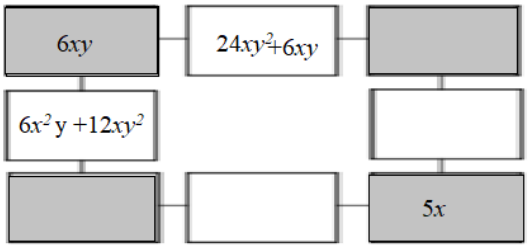
*d) $(18x^2y - 9xy^2 + 6) : (-3)$ $\quad$ $(18x^2y - 9xy^2 + 6xy) : (-3xy)$

Úloha 2: Doplňte.

a)



*b)

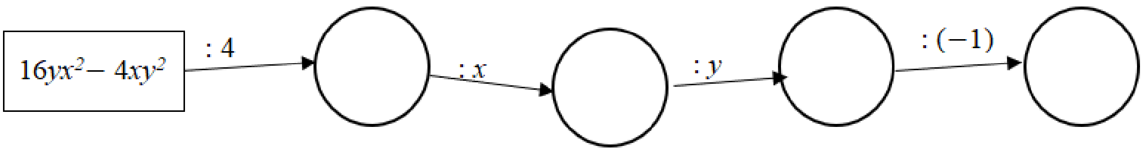


Vyučovací hodina 35

<u>Téma hodiny</u>: Dělení mnohočlenů jednočlenem

<u>Cíl hodiny</u>: Žáci umí dělit mnohočlen jednočlenem.

Rozcvička: Doplňte.



Úloha 1: Vyřešte.

a) $(4a^2 + 8a) : 4$	$(4a^2 + 8a) : a$	$(4a^2 + 8a) : 4a$
b) $(9b^2 - 12b) : 3$	$(9b^2 - 12b) : b$	$(9b^2 - 12b) : 3b$
c) $(11c^2 - c) : (-c)$	$(14x^2y + 21x) : (-7x)$	$(-15k^2m + 6km^2) : (-3km)$

Na zbytek hodiny žáci vytvoří skupiny a budou hrát oblíbené domino na dělení mnohočlenů jednočlenem.

Vyučovací hodina 36

<u>Téma hodiny</u>: Rozklad mnohočlenu na součin – vytýkání

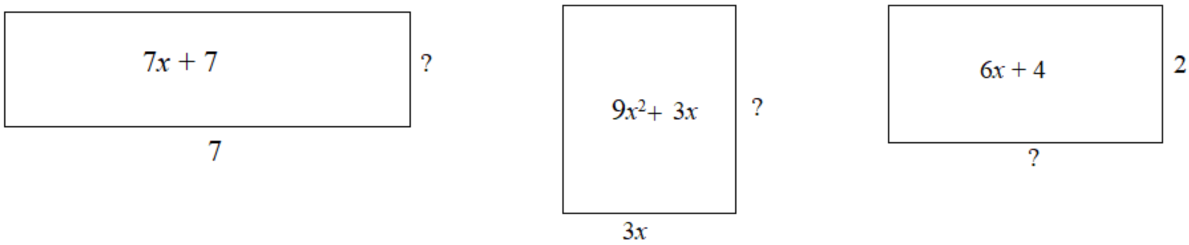
<u>Cíl hodiny</u>: Žáci objeví vytýkání před závorku.

Rozcvička: Odstraň závorky.

a) $5(y + 2)$ b) $2(3y^2 + 6y - 1)$

c) $(x^2 - 7x + 2)\cdot 3x$ d) $-(3x^2 - 4x - 5)$

Úkol 1: Určete druhý rozměr obdélníku, když znáte jeho obsah a délku jedné ze stran.



Pokuste se tuto úlohu řešit pomocí algebraických dlaždic.

Má tato úloha něco společného s rozcvičkou? Očekávám, že šikovní žáci si obě úlohy spojí a společný znak těchto úloh objeví. Pokud neobjeví, nechám je úlohy z rozcvičky vymodelovat pomocí algebraických dlaždic, pak už by spojitost měla většina žáků objevit. V rozcvičce jsme roznásobovali závorku, v úkolu 1 jsme postupovali opačně. Opačnému postupu říkáme vytýkání před závorku nebo zápis výrazu ve formě součinu.

Úkol 2: Doplňte chybějící výrazy.

a) $4x - 8 = 4 \cdot (\_\_\_ - \_\_\_)$ $\qquad$ $10 + 5x = 5 \cdot (\_\_\_ + \_\_\_)$

b) $3x^2 + 5x = x \cdot (\_\_\_ + \_\_\_)$ $\qquad$ $x^2 - 7x = x \cdot (\_\_\_ - \_\_\_)$

Úkol 3: Rozložte na součin.

a) $2x - 2$ $\qquad$ $3x + 6$ $\qquad$ $5x + x^2$

b) $4x^2 + 8x$ $\qquad$ $2x^2 - 8x$ $\qquad$ $3x^2 + 4x$

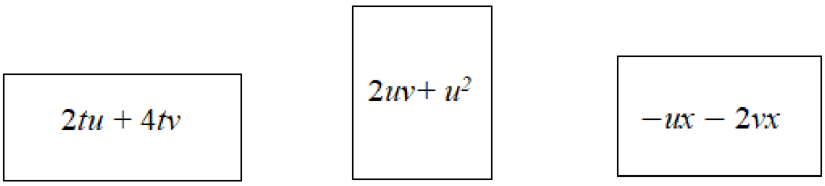
*c) $4xy + 2x$ $\qquad$ $x - 3xz$ $\qquad$ $ax - 4bx$

Vyučovací hodina 37

<u>Téma hodiny</u>: Rozklad mnohočlenu na součin – vytýkání

<u>Cíl hodiny</u>: Žáci si procvičí vytýkáním před závorku.

Rozcvička: Může být délka jedné strany některého z obdélníků $u + 2v$?



Úloha 1: Rozložte na součin.

a) $10r + 5s$ $\quad$ $r^2s + rs$ $\quad$ $2rs^2 + r$

b) $6r^2s + 5rs^2$ $\quad$ $4r^2s^2 + 8r^2$ $\quad$ $r^4s^3 + r^2s$

Úloha 2: Doplňte chybějící členy.

a) $3xy - 8x = x \cdot (\_\_\_ - \_\_\_)$ $\quad$ $9x^2y + 3xy = \_\_\_ \cdot (3x + 1)$

b) $2x^2y - 12x = 2x \cdot (\_\_\_ - \_\_\_)$ $\quad$ $2xy - 4x + 8 = 2 \cdot (\_\_\_ - \_\_\_ + \_\_\_)$

*Úloha 3: Zapište jako součin.

a) $(m + n) \cdot p + q \cdot (m + n)$ $\quad$ $(m - n)r - (m - n)s$

b) $(a + b) \cdot c + 2c \cdot (a + b)$ $\quad$ $(x + y)z - (x + y)$

c) $2(x^2 + 3) - a(3 + x^2)$ $\quad$ $b(2y - 3) - 5(3 - 2y)$

Rozcvičku a úlohu 1 žáci řeší samostatně. Na tabuli napíší řešení jednotlivých úloh, nad kterými diskutují strategie řešení. Úlohu 2 a 3 mohou žáci řešit ve dvojicích.

Vyučovací hodina 38 – 40

Téma hodiny: Rozklad mnohočlenu na součin podle vzorců $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $a^2 - b^2$.

Cíl hodiny: Žáci si umí rozložit mnohočlen na součin.

Rozklad na součin podle vzorců jsme již řešili na závěr kapitoly druhá mocnina dvojčlenu. V těchto hodinách žáci řeší gradované úlohy. Aby získali vhled do řešení, používají algebraické dlaždice. Žáci budou řešit nejen úlohy z učebnice, ale budu mít připravené i loto a pexeso[4].

Vyučovací hodina 41

Téma hodiny: Závěrečné opakování

Cíl hodiny: Žáci si zopakují, co všechno s výrazy řešili formou myšlenkových map.

Ve skupinkách žáci vytvoří myšlenkové mapy, do kterých zahrnou vše, co vědí o výrazech. Tato práce by jim měla být prospěšná v jejich dalším studiu.

[4] *Pexeso – rozklad výrazů na součin podle vzorců.* Dostupné na: http://dumy.cz/material/676-rozklad-vyrazu-na-soucin-pomoci-vzorcu

Vyučovací hodina 42

Téma hodiny: Závěrečné opakování

Cíl hodiny: Žáci si zopakují řešení úloh, ve kterých si nejsou jistí.

Předpokládám, že z minulé hodiny vyplynou úlohy k řešení. Případně využiji Souhrnná cvičení z učebnice matematiky pro 8. ročník (Odvárko, Kadleček, 1999, s. 84)

Vyučovací hodina 43

Téma hodiny: Závěrečné opakování

Cíl hodiny: Formou testu zjistit úroveň znalostí žáků.

Vyučovací hodina 44

Téma hodiny: Závěrečná reflexe

Cíl hodiny: Vyhodnocení

Na začátku hodiny žáci napíší závěrečné zhodnocení, jehož součástí je i výzva, aby nakreslili svůj výraz na konci kapitoly Výrazy. Potom si rozdají své práce z minulé hodiny a opraví chyby. Na závěr společně zhodnotíme výsledky.

Na závěr každé hodiny bude probíhat reflexe, v níž žáci zhodnotí hodinu, co pro ně bylo přínosem, co nového si odnesli, co jim šlo nebo naopak nešlo atd.

4.2 Pre-test

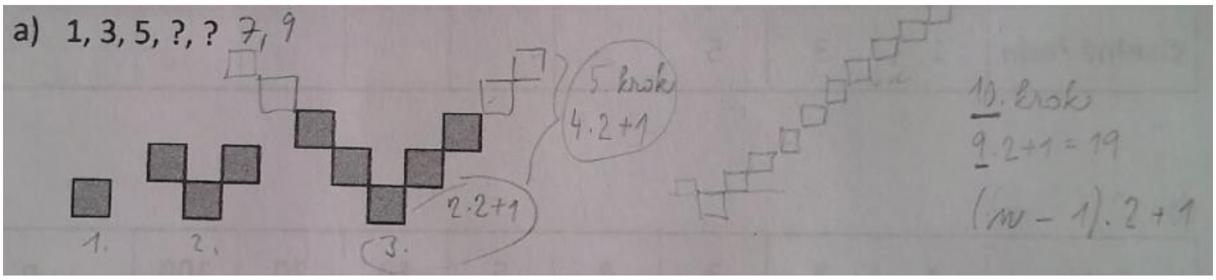
Při sestavování testu jsem se inspirovala různými testy, které jsem vyhledala na internetu. Vlastní pre-test jsem sestavila z úloh, se kterými se již žáci v minulosti setkali. Zvolené úlohy vyžadují znalosti a dovednosti, které jsou předpokladem pro práci s algebraickými výrazy. Tyto úlohy jsou zaměřené na počítání s celými čísly, se zlomky, testují znalost pořadí početních operací a počítání s mocninami. Zahrnuty jsou i úlohy, ve kterých žáci přepisují slovní vyjádření operace do matematického zápisu, a úlohy, které obsahují neznámou x. Pre-test je uveden v příloze 3.

4.3 Průběh experimentu

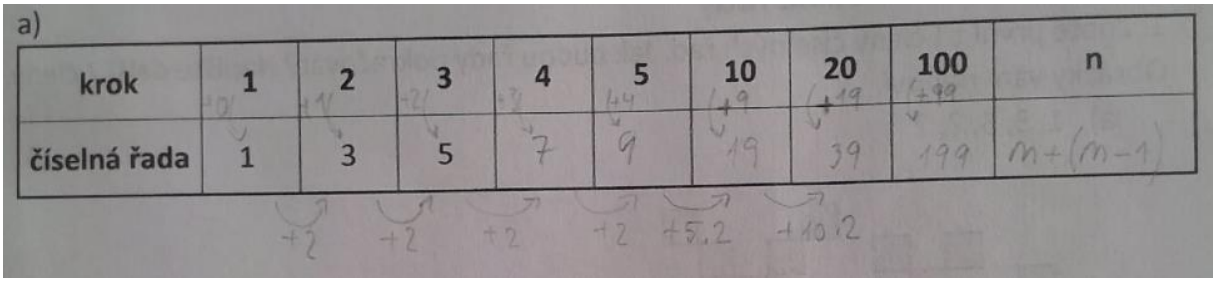
Na 1. hodině žáci psali pre-test. Na napsání tohoto testu měli 30 minut, někteří odevzdali test dříve. Po odevzdání testu jsme s žáky řešili úlohy na tabuli. Někteří z nich přiznávali, že měli problémy se zlomky nebo celými čísly, protože s nimi delší dobu nepočítali. Výsledky pre-testu poukázaly na konkrétní oblasti, kterým bude potřeba při vlastní výuce věnovat větší pozornost.

Druhou hodinu jsme se věnovali číselným řadám (viz Pracovní list 1 v příloze 2). Už při rozdávání někteří žáci projevovali radost, protože viděli obrázky a jak prohlásil Honza z 8. C: „To není matematika, takže je to super.“ První část úkolu, najít další dva členy řady, zvládli všichni žáci bez problémů. Druhá část úkolu, najít desátý, dvacátý, stý a n-tý člen posloupnosti, už byla náročnější. Žáci pracovali ve skupinách. Bylo zajímavé sledovat různé strategie při řešení.

Na obr. 43 a 44 jsou vidět dva rozdílné přístupy. Skupina, jejíž řešení je na obr. 43, došla k závěru, že n-tý člen je $2(n - 1) + 1$. Z řešení je vidět, jak nejprve žáci využili obrázku, který znázorňuje třetí krok, a dokreslili do něj i krok čtvrtý a pátý. Vedle si nakreslili část obrázku znázorňující desátý krok řady. Obrázek nazvali „parohy“. Při vysvětlování svého řešení u tabule popsali, že obě části „parohů“ v každém kroku vyrostou o jeden čtvereček. Na jedné „větvi“ je počet čtverečků vždy o jeden méně, než je číslo kroku, a jeden čtvereček obě „větve“ spojuje, proto $2(n - 1) + 1$. Druhé řešení, které se objevilo jen u jedné skupiny v 8. A, je řešení v tabulce (obr. 44). Nejprve žáci našli, že v každém kroku se číslo zvětší o 2. S tímto poznatkem našli desátý a dvacátý člen, pak začali hledat souvislost mezi pořadím kroku a číslem v řadě a objevili, že číslo v řadě je součet čísla kroku a čísla, které je o jedno menší. Pro n-tý člen našli tento zápis: $n + (n - 1)$. Když se na tabuli objevila obě řešení, někteří žáci se ptali, co je tedy správně. Nechala jsem je diskutovat, po chvíli dohadů se přihlásil Honza a zeptal se, jestli může jít k tabuli, že si myslí, že obě řešení jsou stejná, jen stačí zbavit se závorek.



Obrázek 41: Úloha a) z pracovního listu 1 – grafické řešení

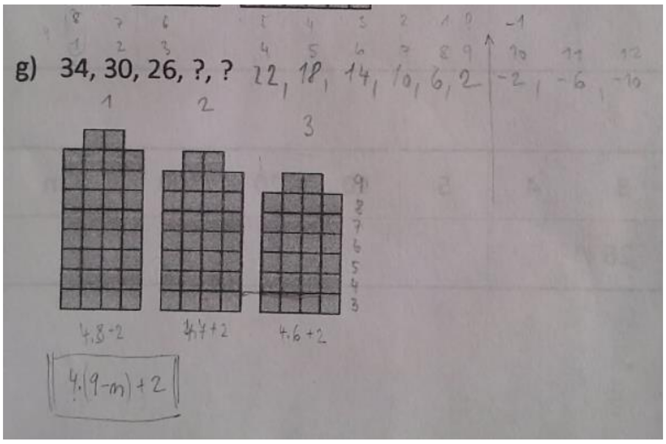


Obrázek 42: Úloha a) z pracovního listu 1 – řešení v tabulce

Většina skupin se držela obrázku a hledala řešení pomocí něj, proto se ve většině úloh skupiny shodly na řešení. Jedna skupina, skupina chlapců z 8. A, zapisovala pokračování do tabulky a hledala řešení v ní, a to až do úlohy e). Vyčíst řešení z tabulky u úlohy e) se jim nedařilo, tak se vrátili k obrázku, kde našli řešení snadno. U úlohy g) se nepodařilo žádné skupině nalézt během hodiny řešení pro stý a n-tý člen, takže jsem tuto úlohu nechala žákům za domácí úkol místo původně plánovaného domácího úkolu.

Během hodiny byli všichni žáci aktivní, a to včetně slabších žáků, kteří zažili úspěch v úloze 1 při hledání dalších dvou členů řady. Při diskusi u tabule se objevily zajímavé postřehy žáků. Např. „Proč v úloze d) jsou členy řady druhou mocninou čísla pořadí kroku, vždyť druhá mocnina souvisí se čtvercem a na obrázku je trojúhelník?“ Když žáci nemohli sami najít odpověď, navedla jsem je otázkou, jestli by z trojúhelníku nemohli čtverec vytvořit, a to už se z lavic ozývalo „a jo“.

V 8. A přišel další hodinu s řešením úlohy g) Martin a u tabule vysvětlil svoji strategii řešení (obr. 45). Na obrázku je vidět, že pokračoval v číselné řadě a nad ní si zapsal číslo kroku. Všiml si, že v každém kroku se obrázek zmenšuje o jednu řadu čtverečků. Počet řad zapsal nad čísla kroků a když viděl čísla kroků a počet řad, všiml si, že součet těchto čísel je 9. Tímto způsobem došel k n-tému členu ve tvaru $4(9 - n) + 2$.



Obrázek 43: Řešení úlohy g)

Ve druhé hodině jsme v řadách pokračovali geometrickými vzory. Žáci měli možnost používat dřívka na pokračování vzorů, někteří dali ale přednost náčrtu vzoru na papír. První úlohu žáci už znali z minulosti, takže pravidlo přidat v každém kroku 3 dřívka všichni brzy odhalili. Úlohy 1, 2 a 4 se řeší podobně, což některé skupiny objevily a šířily svoji zkušenost dál. U všech úloh se v obou třídách objevily dvě varianty zápisu n-tého členu. Při prezentaci výsledků u tabule opět padla otázka, co je správně. Někteří žáci si s úpravou poradili a zjistili, že obě varianty u každé úlohy jsou správně.

Na začátku 4. hodiny byla rozcvička, na které si žáci zopakovali pravidla řešení číselných výrazů. Bylo to důležité zvlášť pro slabší žáky. Jeden z nich ve třídě 8. A se nahlas a trochu rozzlobeně zeptal, jak si to má zapamatovat. Pohotově mu na to odpověděla Anička: „To máš tak, ve škole se věci učíme od nejjednodušších až po ty složité. V první třídě jsme se učili jen sčítat a odčítat. Ve druhé třídě jsme se učili násobit a dělit a teprve nedávno mocnit a odmocňovat. Když to převedeš na počítání, tak řešíš, jako by ses vracel zpátky v čase. Nejdřív umocníš nebo odmocníš, pak vynásobíš a vydělíš a sčítání a odčítání si necháš na konec.“

U úloh 1, 2 a 3 si žáci zopakovali známé vzorce na obvod, obsah a objem a na známých úlohách jsem je seznámila s novou terminologii, která nás měla provázet příštími hodinami. U úlohy 4, která má tři dílčí úlohy, bylo zajímavé, že se objevily dva způsoby řešení b). Jedna skupina žáků dosadila do výrazu z úlohy a) informace z úlohy b). Druhá skupina žáků řešila úlohu b) samostatně bez ohledu na výraz z úlohy a). Při prezentaci řešení u tabule a následné diskuzi se skupiny dohodly, že obě řešení jsou správně. Úlohu 5 jsme nestihli a žáci ji dostali za domácí úkol.

Pátou hodinu jsme hlavně používali novou terminologii, se kterou se žáci seznámili v předchozí hodině. Na začátku hodiny jsme se zdrželi při kontrole domácího úkolu, proto jsem zkrátila rozcvičku a žákům jsem zadala pouze první čtyři úlohy z těch, které jsem měla připravené.

U úlohy 1 si žáci nebyli jistí, co je počet členů ve výrazu, tak jsme se vrátili k úloze o obvodu obdélníku z minulé hodiny. Ukázali jsme si, že u něj máme dva různé rozměry a že ve výrazu $2a + 2b$, který vyjadřuje obvod obdélníku, jsou tedy dva členy. Z daných příkladů si žáci vyvodili, že jednotlivé členy ve výrazu odděluje plus nebo mínus.

Zajímavé bylo řešení aritmetického průměru tří po sobě jdoucích čísel. Žáci zvolili různé strategie: 1. Vyzkoušeli aritmetický průměr tří konkrétních po sobě jdoucích čísel a zjistili, že aritmetický průměr je prostřední číslo ze zvolených čísel. 2. Vzali tři po sobě jdoucí čísla x, $x + 1$, $x + 2$. Někteří žáci úlohu sami vyřešili a některým jsem pomohla návodnými otázkami.

3. Vzali tři po sobě jdoucí čísla $x - 1$, x, $x + 1$. Tito žáci již měli určitý vhled do podstaty aritmetického průměru. Na můj dotaz, proč si zvolili tento zápis, odpověděli, že je to tak jednodušší, protože musí čísla sečíst. A když je zapíší takhle, tak součet je $3x$ a aritmetický průměr je tedy x. Všichni se shodli, že aritmetickým průměrem tří po sobě jdoucích čísel je prostřední číslo.

U úlohy 4 jsem zjistila, že mé řazení úloh nebylo vhodné, protože se zde střídají dotazy ke čtverci *ABCD* a ke čtverci *EFGH.* Slabší žáci se zastavili na úloze b), což jsem předpokládala. Tato nesnáz je odradila od další práce, takže jsme se domluvili, že nejprve vyřeší sadu úkolů ke čtverci *ABCD* a pak sadu úkolů ke čtverci *EFGH,* které řešili s mou dopomocí.

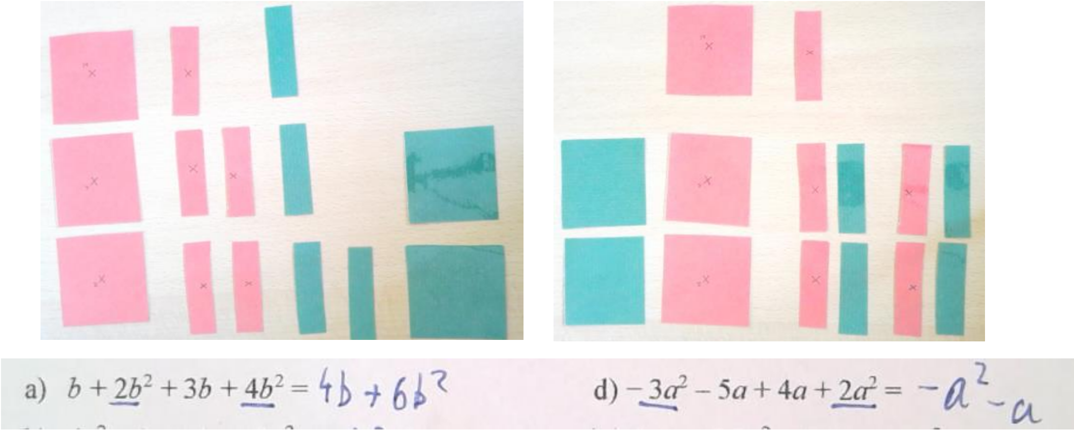
Seznámení s algebraickými dlaždicemi

Na začátku 6. vyučovací hodiny jsem využila připravenou rozcvičku jako krátkou desetiminutovku. Po jejím dokončení jsem žákům představila algebraické dlaždice a na úlohách 1 a 2 jsem jim ukázala, jak s nimi pracovat. Manipulovala jsem s dlaždicemi na svém stole a pomocí vizualizéru jsem vše promítala na tabuli. Každý žák měl svoji sadu dlaždic, se kterou pracoval na své lavici. Žáci se rozdělili do tří skupin. První tvrdili, že jsou dlaždice zbytečné, vždyť je to jasné, a ani dlaždice nevyzkoušeli. Druzí dlaždice vyzkoušeli a také tvrdili, že všemu rozumí. Třetí skupina nechápala, proč by měli dlaždice používat a k čemu jim budou. Byli to žáci, kteří mají často negativní postoj k novým věcem (v 8. A je jeden takový žák a v 8. C tři). U dalších úloh jsem nechala na zvážení žáků, zda budou dlaždice používat, nebo ne.

U úlohy 3 žáci postupovali tak, že doplnili chybějící údaje a určili obvody. Někteří žáci sami, někteří se poradili s ostatními. V 8. A vznikla zajímavá diskuse. Petr se ptal, proč u rozměrů obrazců nejsou jen čísla, ale i písmenka. Martin mu na to pohotově odpověděl, že je to jako kdyby obrazec dělal ze dřívek, tak na jednu stranu bude potřeba 5 dřívek ($5d$), na druhou stranu 2 dřívka ($2d$) a na celý obdélník pak bude potřeba 14 dřívek ($14d$). Diskuzi jsem využila a jednomu z nich jsem dala dřívka a druhému špejle. Shodli jsme se, že špejle jsou také dřívka, jen jsou delší. Oba dostali za úkol daný obdélník sestavit, a pak určit jeho obvod. Martin řekl, že bylo zbytečné sestavovat obdélník, že jsem se mohla rovnou zeptat, jaký obvod by měl obdélník ze špejlí nebo dřívek, že stačí změřit délku špejle nebo dřívka a vynásobit 14.

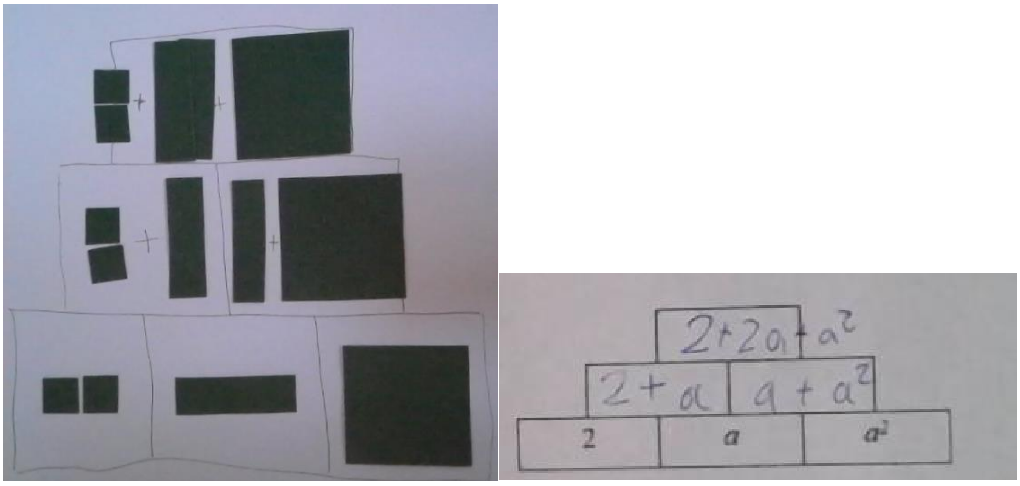
U úlohy 4 se žáci smáli, že jsou jako v první třídě. Vysvětlila jsem jim, že jsem tuto úlohu zvolila záměrně, protože v algebraických dlaždicích máme jen zástupce x^2 a v některých úlohách se můžeme setkat i s druhými mocninami dalších proměnných.

Úlohu 5 žáci řešili dvojím způsobem. Jedni si úlohy znázorňovali pomocí dlaždic, druzí si jen podtržením vyznačili členy, které spolu mohou sčítat.



Obrázek 44: Ukázky žákovských řešení úlohy 5

V 7. vyučovací hodině žáci procvičovali sčítání jednočlenů ve sčítacích pyramidách. Pracovali bez problémů a se zájmem, někteří se zastavili u čtvrté pyramidy s tím, že v prvním kroku jen opíšeme dolní řádek pyramidy a připíšeme plus, ale nic nesčítáme. Ptala jsem se na důvod. Jedna žákyně to vysvětlila pomocí algebraických dlaždic (obr. 47). „Sečíst můžeme jen dlaždice, které mají stejný tvar, takže sečíst můžeme jen *a* v druhém kroku.“

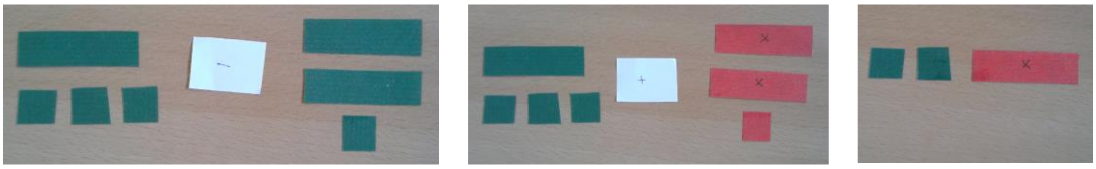


Obrázek 45: Ukázka řešení součtové pyramidy pomocí algebraických dlaždic

Další úlohy řešili žáci bez problémů. První úkol v každé úloze žáci řešili za pomoci algebraických dlaždic. Přibližně polovina žáků používala dlaždice i na další úkoly, třetina je používala ke kontrole. Někteří se přiznali, že si nejsou jistí při počítání s celými čísly, tak si svůj výsledek zkontrolovali na dlaždicích. Zbytek žáků si vystačil s podtrháváním členů, které se spolu sčítají.

Odčítání mnohočlenů

V první části této vyučovací hodiny jsme opakovali pojmy – koeficient, proměnná, počet členů v mnohočlenu, číselný výraz, výraz s proměnnou a sčítání mnohočlenů. V druhé části hodiny jsem žákům připomněla. odčítání celých čísel pomocí příkladů $10 - 7 = 3$ a $10 + (-7) = 3$. Pak jsem vzala úlohu $(x + 3) - (2x + 1)$ a zeptala jsem se žáků: „Jak by pravidlo, které jsme si ukázali u celých čísel, šlo využít u odčítání mnohočlenů?“ „Mínus změníme na plus.“ „A to stačí?“ „Ne, musíme ještě změnit druhou závorku.“ „Jak?“ Nikdo neodpovídal, tak jsem se ptala dál. „Jaký vztah je mezi čísly 7 a -7, 2 a -2, 30 a -30?“ „Jsou to čísla opačná.“ „Dobře. Musíme tedy najít opačný mnohočlen. Jak bude vypadat opačný mnohočlen?“ Hezky to popsala Katka, která řekla: „Když je něco naopak, tak to musíme otočit.“ Vzala si dlaždice a nejprve si poskládala příklady s celými čísly, pak poskládala úlohu $(x + 3) - (2x + 1)$ (obr. 48).



Obrázek 46: Ukázka řešení odčítání mnohočlenů, úloha 3 a)

U následujících úloh všichni žáci používali při řešení dlaždice. Když úlohy dokončili, zeptala jsem se, jak by řešili úlohy bez dlaždic. Nejdříve různě obraceli dlaždice v ruce a pak sami formulovali pravidlo, že „změní mínus na plus“ a znaménka, která jsou v závorce, také změní, pak už je to sčítání. Na tabuli jsem napsala další dvě úlohy podobného typu a chtěla jsem, aby u nich žáci použili pravidlo, které zformulovali, a vše zapsali.

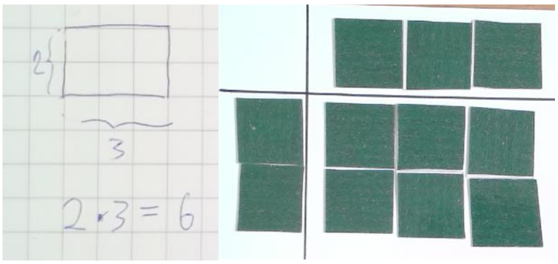
Procvičování

Devátá vyučovací hodina byla ve znamení procvičování sčítání a odčítání mnohočlenů. U rozcvičky se v 8. A ozvalo, že už jsou zase v první třídě. Žáky ale zarazilo, že součty ve vyznačených polích vycházejí stejně, a zajímalo je proč. Nechala jsem je, aby diskutovali ve skupinách. Ve vymezeném čase nikdo na řešení nepřišel. Úlohu jsme odložili a šli řešit další. Žáci mohli pracovat ve dvojicích, což bylo přínosné, kontrolovali navzájem své výsledky a společně hledali, proč jim úloha nevychází. U úlohy 2 žáci zjistili, že je velmi podobná úloze z rozcvičky, a úlohu vyřešili. Nyní už dokázali odpovědět na otázku, proč jsou součty ve vyznačených polích stejné.

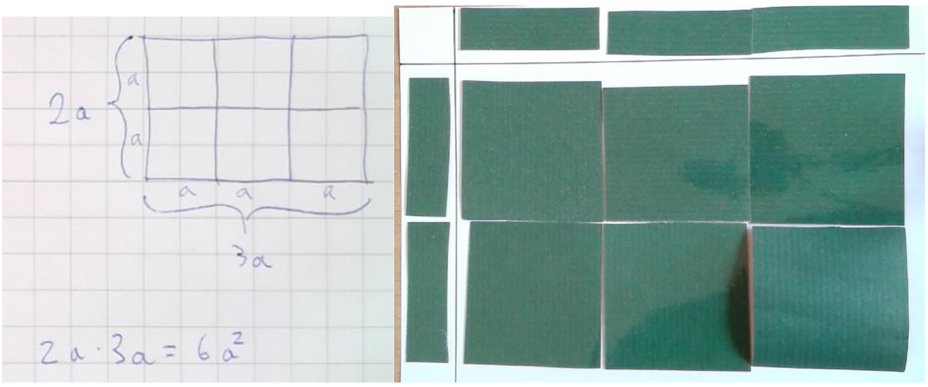
Desátá vyučovací hodina byla opět ve znamení procvičování sčítání a odčítání mnohočlenů. Některé žáky překvapila rozcvička. Nevěděli, co mají dělat. Napověděla jsem jim, ať využijí zápis do tabulky. Začali jsme společně na tabuli, pak už nebyl s řešením problém. Úlohy 1 a 2 žáci řešili bez problémů. Po půl hodině práce jsem se zeptala, jestli má někdo dotaz ke sčítání nebo odčítání mnohočlenů. Nikdo žádný dotaz neměl, takže jsem mimo plán, který jsem měla připravený, zadala žákům čtyři úlohy na sčítání a odčítání mnohočlenů. Kdo vyřešil a odevzdal, pokračoval dál v zadané práci. Na doma jsem jim nechala na přemýšlení úlohu 5.

Využití algebraických dlaždic při násobení

Na začátku 11. vyučovací hodiny jsem žákům rozdala výsledky desetiminutovky z minulé hodiny, která dopadla velice dobře, a výsledek úlohy 5 z minulé hodiny. Chyby si žáci vysvětlili mezi sebou. Tuto hodinu jsme věnovali práci s mocninami a grafickému znázornění násobení. Ukázala jsem žákům grafické znázornění násobení pomocí obsahu obdélníka a algebraických dlaždic. Nejprve jsem na připravenou podložku vyskládala dlaždice znázorňující činitele a pak znázornila součin. Žáci viděli, že při manipulaci s algebraickými dlaždicemi vzniká obdélník, stejně jako na obrázku v sešitě (obr. 49 a 50).

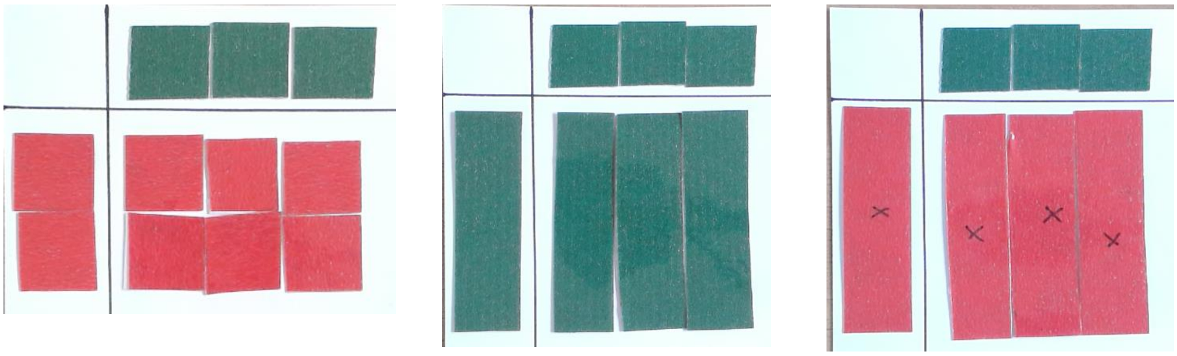


Obrázek 47: Ukázka grafického znázornění součinu 2·3



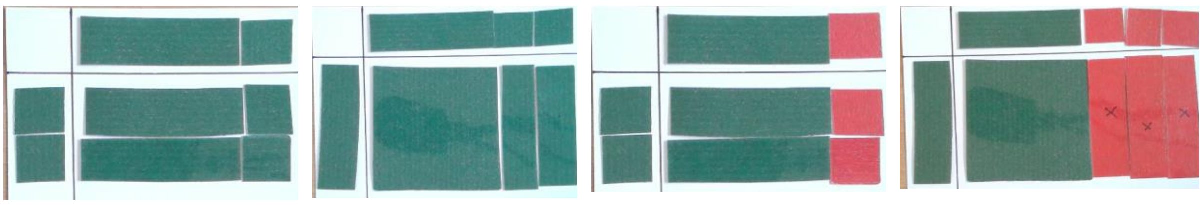
Obrázek 48: Ukázka grafického součinu 2a·3a

V 8. A byli žáci velmi aktivní, pouze jsem jejich aktivitu usměrňovala. V 8. C jsem k aktivitě vybízela žáky dotazy. Úlohu 2 řešili žáci samostatně, výsledky si pak navzájem zkontrolovali.



Obrázek 49: Ukázky znázornění násobení dlaždicemi

Dvanáctou vyučovací hodinu jsme začali součinovými čtverci, kde si žáci procvičili násobení jednočlenů. Odtud jsme přešli na násobení jednočlenu mnohočlenem. V úloze 1 jsme využili znázornění algebraickými dlaždicemi (obr. 52). U první úlohy jsem žákům připomněla, jak s dlaždicemi manipulovat. „Nejprve vyskládáme na podložku činitele. Když si představíme, že násobení je určování obsahu plochy obdélníku, tak jsem vyskládala délky stran obdélníka. Nyní nám zbývá vyskládat samotný obdélník. Jeho obsah je výsledkem násobení.“



Obrázek 50: Ukázka řešení úlohy 1 algebraickými dlaždicemi

Ukázali jsme si výsledek a bavili se o tom, co dlaždice znázorňují. V 8. A Anička s Tomášem společně došli k závěru, že vlastně tím jednočlenem vynásobíme jednotlivé členy v závorce. V úloze 2 si žáci zopakovali sčítání výrazů při určování obvodů obrazců, což bylo bez problémů. Menší problém nastal u obsahu trojúhelníku, ale žáci sami mezi sebou si vyjasnili, jak ho určit. Obsah pravidelného šestiúhelníku brali někteří žáci jako výzvu.

Třináctou vyučovací hodinu žáci procvičovali násobení jednočlenu a mnohočlenu. Někteří využívali algebraické dlaždice, někteří si obloučkem naznačili, jak násobí, a někteří dokonce řešili úlohy bez pomůcek. Za důležité považuji, že i ti, kteří potřebovali podporu algebraických dlaždic, dokázali vyřešit úlohy s desetinnými čísly a zlomky, kde už dlaždice nestačí. Ukazuje to na to, že se pro ně algebraické dlaždice stávaly generickým modelem.

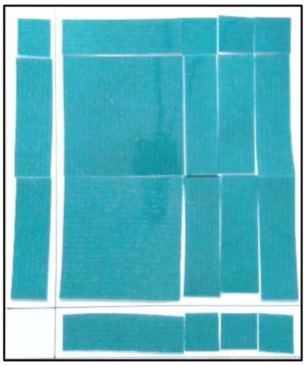
Procvičování

Na začátku 14. vyučovací hodiny žáci řešili součinové čtverce, kde si procvičili násobení jednočlenu a mnohočlenu. Další procvičení probíhalo formou hry, což se dětem líbilo. V každé třídě se vyskytla jedna skupina, kde se našel žák, který nechtěl hrát. Na závěr se žáci shodli, že se jim hra líbila víc než počítání do sešitu, ale že je to náročnější než si v klidu svým tempem a s podporou dlaždic řešit úlohy sám do sešitu.

Také 15. vyučovací hodina proběhla v obou třídách bez problémů, i když se objevily hlasy, že domino bylo lepší. Na této hodině žáci řešili náročnější úlohy, už bez podpory algebraických dlaždic. Dlaždice sice měli k dispozici, ale nevyužili je.

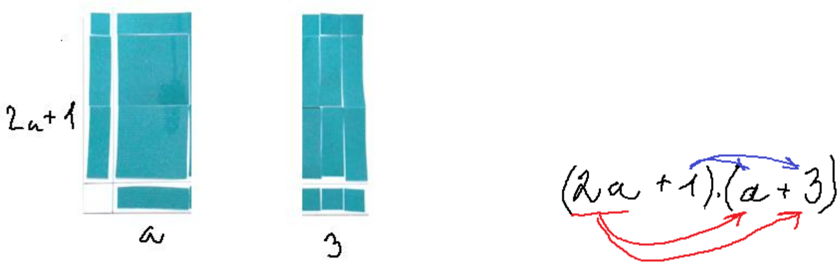
Násobení mnohočlenu mnohočlenem

Na začátku 16. vyučovací hodiny žáci psali místo rozcvičky krátký test, který měl podobné zadání jako rozcvička. Téma této hodiny bylo násobení mnohočlenů. Začali jsme opět obvodem a obsahem mnohoúhelníků. Žákům jsem doporučila na násobení využít dlaždice (obr. 53).



Obrázek 51: Modelování násobení úlohy (a + 3)(2a + 1) – obsah obdélníka úloha 1 a)

Kladla jsem dětem otázky: „Jak se toto násobení liší od násobení s jednočlenem? Můžeme použít znalosti z násobení jednočlenu a mnohočlenu? Jak?“ Po těchto otázkách se někteří žáci vrátili k násobení jednočlenu a mnohočlenu. Anička si zapsala součin $a(2a + 1)$ a zároveň ho vymodelovala z dlaždic. Využila první úlohu, kterou jsme řešili společně. U tabule vysvětlila: „Když závorku násobím a, tak tím a vynásobím to, co je v závorce. Když k a přidám 3, tak musím i tou trojkou vynásobit to, co je v závorce.“ (obr. 54 vlevo) K Aničce se přidal Tomáš: „To znamená, že musím násobit všechno se vším.“ „Jak to myslíš Tomáši?“ „Jednoduše, takhle.“ A Tomáš na tabuli napsal výpočet (viz obr. 54 vpravo). Následovala diskuze, jestli oběma cestami, cestou Aničky i Tomáše, lze dojít ke stejnému výsledku. Na tabuli Honza dořešil příklad Aničky a Katka Tomášův, takže jsme zjistili, že obojí je správně.



Obrázek 52: Vysvětlení Aničky a Tomáše

Žáci pokračovali řešením dalších úloh. Bylo vidět, jak někteří žáci sestavili úlohu z dlaždic, a pak zkoumali, jestli opravdu druhý způsob také funguje.

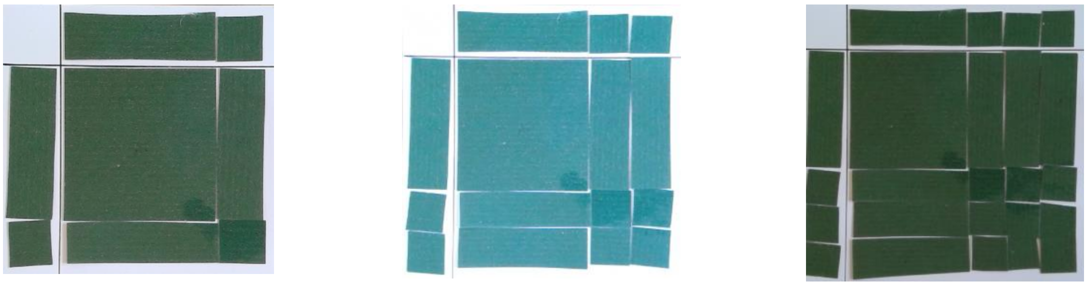
Procvičování

Další tři vyučovací hodiny žáci řešili úlohy na násobení mnohočlenů. Na začátku ještě většina žáků používala při řešení algebraické dlaždice, postupně je ale začaly odkládat. Třetí hodinu si žáci zahráli domino (příloha 5), kde na hracích kartách byly úlohy na násobení mnohočlenů. Tentokrát byla tato hra mnohem náročnější, zvlášť pro slabší žáky.

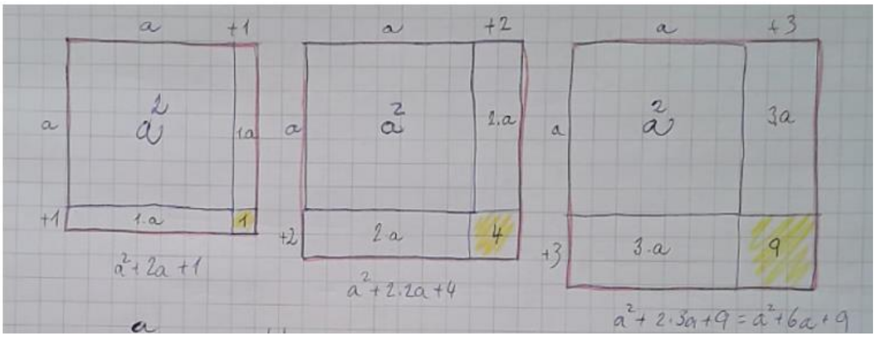
Na začátku 20. vyučovací hodiny žáci řešili součinový čtverec, ve kterém si zopakovali aktuální násobení mnohočlenů. Tuto hodinu bylo násobení mnohočlenů schováno v netradičních úlohách z geometrie, což slabší žáky odrazovalo. Dala jsem jim vybrat, jestli chtějí tyto úlohy zkusit řešit ve dvojicích, nebo si vzít úlohy z učebnice. V 8. A využili tuto možnost dva žáci a v 8. C čtyři žáci. Ostatní řešili zadané úlohy a ve dvojicích nebo čtveřicích konzultovali postupy a kontrolovali si výsledky. Tuto hodinu označili žáci jako velmi náročnou. Někteří žáci ji ale zařadili mezi hodiny zajímavé.

Vzorec $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Na začátku 21. vyučovací hodiny si žáci napsali desetiminutovku na násobení mnohočlenů. Pak se rozdělili do skupin. Ve skupinách si zopakovali druhou mocninu přirozených čísel do 20 a zapsali je do tabulky. Pak si vzali algebraické dlaždice a řešili úlohu, ve které měli urči obsah čtverců, jejichž délka strany se postupně zvětšuje. Během řešení vznikaly zajímavé diskuze ve skupinách. Všechny skupiny dospěly k závěru, že zvětšený čtverec v sobě schovává dva čtverce, původní a nový, a dva stejné obdélníky, které jsou stejně velké, a postupně skládaly dohromady obsah zvětšeného čtverce. Na obrázku 55 je ukázka řešení pomocí dlaždic a na obrázku 56 je ukázka zápisu žáka do sešitu.



Obrázek 53: Řešení úlohy pomocí dlaždic



Obrázek 54: Ukázka zápisu řešení do sešitu

Některým skupinám jsem dávala otázky, které je měly navést k cíli: „Jaký obsah má nový čtverec? Na čem tento obsah závisí? Jaké jsou délky stran obdélníku, který se skrývá uvnitř čtverce? Jaký bude jeho obsah? Na čem závisí?" V 8. A se při prezentaci výsledků jednotlivých skupin ozval Martin a řekl: „Proč jsme to hledali tak složitě? Když počítáme obsah čtverce, tak násobíme stranu krát stranu. Stačí si to napsat, vynásobit dvě stejné závorky a je to." Dala jsem mu za pravdu a řekla jsem mu, že je v matematice dobré vidět, co se pod pouhým počítáním může skrývat. Na závěr jsme došli ke vzorci a prodiskutovali jsme jeho význam. Shodli jsme se, že je dobré ho znát, protože zrychlí naše počítání, ale když náhodou na něj někdo zapomene, tak se nic neděje a násobením, které ukázal Martin, dojde ke stejnému výsledku.

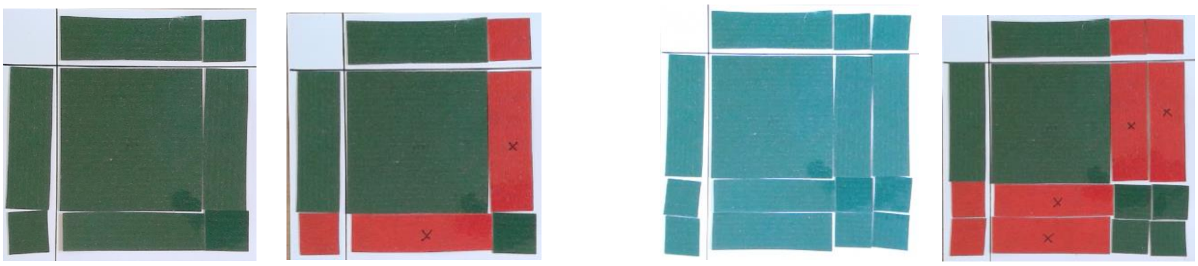
Procvičování

Na začátku 22. vyučovací hodiny jsme hráli Matematického krále, žáci mají tuto hru rádi. Úlohu 1 všichni bez problémů zvládli, některé žáky ale udivilo, že zadání b) je stejné jako a). Žáci nepracovali ve skupině, jak jsem původně plánovala, ale samostatně a ve dvojicích si kontrolovali výsledky, žáci mohli k řešení využít algebraické dlaždice. U úlohy 2 b) byla důležitá diskuze u tabule a ukázka řešení s pomocí dlaždic, protože někteří žáci, kteří k řešení nepoužili dlaždice, neumocnili celý člen, ale jen proměnnou. U úlohy 3 si žáci zopakovali mocninu desetinného čísla a zlomku.

Na začátku 23. vyučovací hodiny jsme hráli hru, jak je popsáno v plánu výuky. Po hře se jim moc nechtělo začít pracovat v lavicích. U úlohy 1 měli žáci doplňovat chybějící členy. Mezi sebou si vyměňovali finty, jak členy najít. Někteří si vzali na pomoc dlaždice. Oříškem bylo c), ale někteří žáci pomocí mých otázek našli řešení. U úlohy 2 bylo doporučeno použít dlaždice, někdo je používal a někdo ne, u c) použít nešly. Zajímavá byla diskuze na závěr, kde žáci prezentovali svoje způsoby řešení. Žáci používající dlaždice u úlohy a) se snažili z dlaždic sestavit čtverec. Postupovali dvěma různými postupy. První skupina žáků vzala velkou čtvercovou dlaždici (a^2) a malé čtvercové dlaždice (jednotky). Malé dlaždice sestavili do čtverce a na závěr přidali obdélníkové dlaždice (*a)*. Druhá skupina vzala velkou čtvercovou dlaždici a obdélníkové dlaždice. Obdélníkové dlaždice rozdělili napůl a přiložili k čtvercové dlaždici a na závěr přidali malé čtvercové dlaždice. Žáci, kteří dlaždice nepoužívali, většinou vycházeli ze dvou členů mnohočlenu, ze členu s druhou mocninou proměnné a z čísla. Oba členy odmocnili a pak provedli kontrolu, jestli prostřední člen mnohočlenu odpovídá úpravě. Zeptala jsem se žáků, jestli toto řešení nesouvisí s některým řešením s dlaždicemi. Přihlásil se Honza a ostatním u tabule ukázal souvislost s řešením první skupiny, kde čtverce představují druhé mocniny členů v závorce (a, b) a obdélníky představují prostřední člen mnohočlenu ($2ab$).

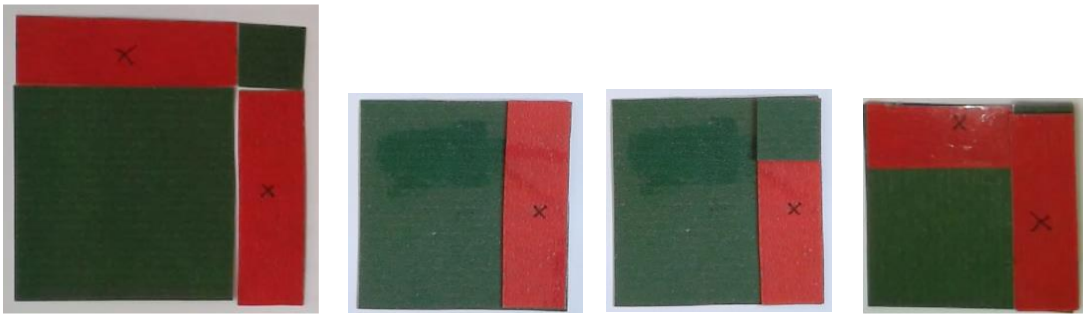
Vzorec $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Na začátku 24. vyučovací proběhla oblíbená hra Matematický král. V této hodině měli žáci objevit další vzorec $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Některé skupiny se zaměřily na to, co se změní, když se změnilo znaménko (obr. 57). Po sestavení dlaždic žáci velmi rychle znali odpověď. Tomáš řekl: „Protože je mínus v závorce, tak se změní znaménko. Ale jen u toho obdélníku.“ Anička ho doplnila: „A když si vezmeme vzorec $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, tak v něm změníme znaménko u $2ab$, protože to je ten obdélník. Takže $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.“



Obrázek 55: Ukázka řešení algebraickými dlaždicemi

Problém nastal, když si někteří žáci chtěli čtverec a změnu ve čtverci namalovat. Při tomto postupu jim nebylo jasné, jak dojít ke vzorci. Slovo si vzal Honza a ukázal vše na algebraických dlaždicích: „My čtverec zmenšujeme, takže stačí, když obdélníkové dlaždice poskládáme do původního čtverce. Vlastně zakryjeme tu část, kterou odečítáme. Zelená plocha, která je z původního čtverce vidět, je obsah zmenšeného čtverce.“ (viz obr. 58) Algebraické dlaždice zde byly cenným pomocníkem.



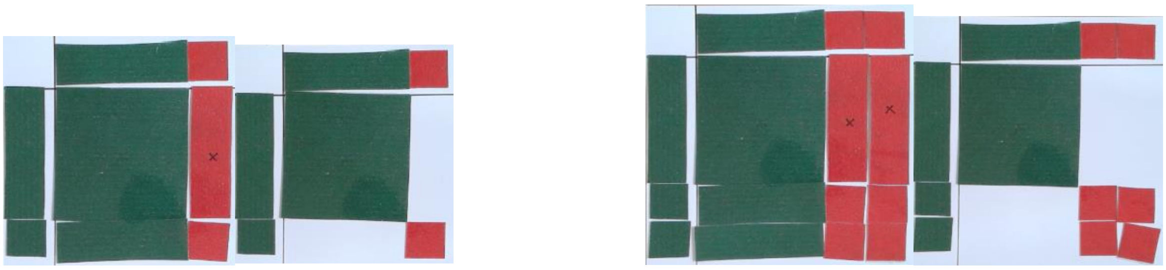
Obrázek 56: Práce s algebraickými dlaždicemi, vysvětlení Honzy

Dvacátou pátou vyučovací hodinu jsme opět začali hrou Matematický král na mocniny. Tato hodina byla věnována procvičování druhé mocniny dvojčlenu $(a - b)^2$ a proběhla bez problémů. Na závěr se žáci shodli, že je to stejné jako $(a + b)^2$, jen je potřeba si dávat pozor na znaménko.

Následující 26. vyučovací hodina byla věnována procvičování použití vzorce $(a - b)^2$.

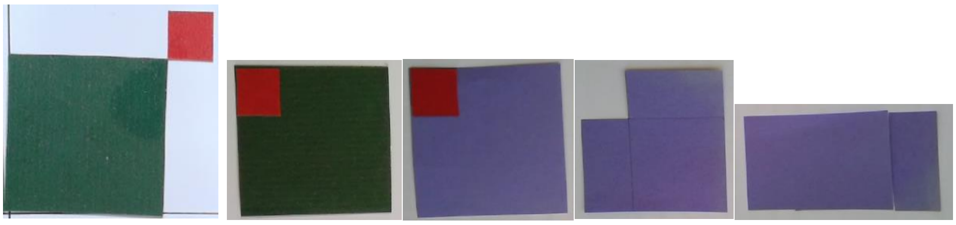
Vzorec $(a - b)(a + b)$

Další hodinu žáci zkoumali součin $(a - b)(a + b)$. Pracovali opět s algebraickými dlaždicemi (obr. 59).



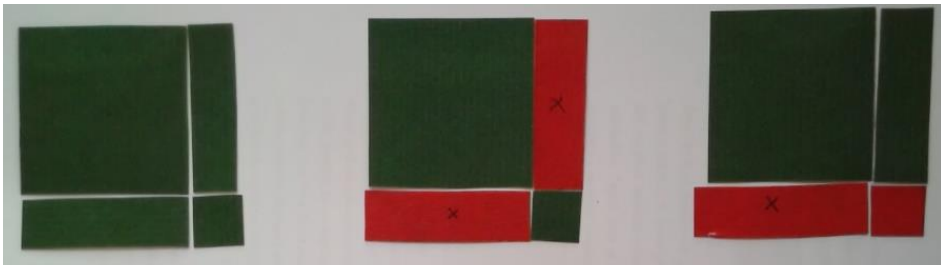
Obrázek 57: Modelování součinu $(a - b)(a + b)$ algebraickými dlaždicemi

Opět jsme se nevyhnuli diskuzi o důležitosti vzorce a také jsme diskutovali o tom, jak souvisí obrazec složený z dlaždic s obsahem obdélníku, který žáci měli najít. Tento obdélník měl mít rozměry jedné strany $a - b$, druhé strany $a + b$ (viz Plán výuky 27. vyučovací hodina). Navrhla jsem dvě věci, vzít si ten nejjednodušší případ, kdy jednu stranu o jednu zvětšíme a druhou stranu o jednu zmenšíme a vzít si na pomoc nůžky a zkusili přijít na to, jak souvisí řešení s dlaždicemi s obdélníkem. Protože jsem nechtěla, aby žáci stříhali dlaždice, tak jsem jim doporučila vystřihnout si velkou čtvercovou dlaždici z papíru, tu lze pak rozstříhat. Honza na to šel podobně jako u jedné z předešlých úloh (obr. 60). Nejprve položil malý čtvereček na velký, s tím, že zelená plocha je hledaný obsah. Totéž udělal se čtvercem, který mohl rozstříhat. Z tohoto čtverce ten malý čtvereček vystřihl. Teď měl plochu, která měla být plochou obdélníku. Přemýšlel, jak z tohoto obrazce udělat obdélník (viz obr. načrtnuté linie tužkou). Načrtl si dvě linie, rozstřihl obrazec podél jedné z těchto linií a ze vzniklých dvou obrazců složil obdélník.



Obrázek 60: Nalezení souvislosti jednotlivých řešení

Ze závěrečné debaty jsem vybrala postřeh Aničky: „Pokaždé jsme z dlaždic poskládali stejný čtverec, jen byl jinak barevný (obr. 61).“ Anička měla na mysli modelování $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $(a - b)(a + b)$.



Obrázek 61: Postřeh Aničky při práci s dlaždicemi

Procvičování

Celou 28. vyučovací hodinu žáci procvičovali řešení úloh, kde se vyskytoval součin $(a - b)(a + b)$.

U úlohy $(5 + z)(z - 5)$ žáci diskutovali o tom, jak úlohu řešit, jestli se to dá řešit tím vzorcem, nebo ne a co lze a nelze vyměnit. Nakonec se shodli, že $(5 + z)(z - 5) = (z + 5)(z - 5)$.
Další hodinu žáci pracovali ve skupinách. Měla jsem pro žáky připraveny čtyři aktivity, ale ne všechny skupiny poslední hru stihly dokončit.

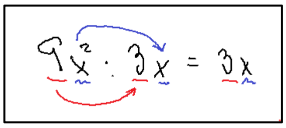
Dělení jednočlenu jednočlenem

Na začátku 31. vyučovací hodiny proběhla oprava testů z minulé hodiny a pak žáci hráli Matematického krále na násobení jednočlenů. Žáci pak měli za úkol vytvořit ve skupinách čtyři příklady na dělení jednočlenů a seřadit je podle obtížnosti. Skupiny prezentovaly svoji práci u tabule, kde proběhla i diskuze o tom, jak jednočleny dělíme.

Další hodinu žáci procvičovali dělení jednočlenů. První úlohu si žáci poskládali z algebraických dlaždic. Nejprve si na podložku položili dlaždice, které představovaly dělitele, a pak si vzali dlaždice, které představovaly dělenec, a snažili se tyto dlaždice umístit do obdélníku. Když se jim to podařilo, zjistili délku druhé strany obdélníku (obr 62).

Obrázek 62: Ukázka postupu dělení jednočlenu jednočlenem

Některým žákům přišlo zbytečné používat dlaždice. Objevily se dva způsoby řešení bez dlaždic. O první způsob se s ostatními podělil Tomáš: „Rozdělím si dělenec a dělitel na číslo a část s proměnnou. Vydělím číslo číslem a proměnnou vydělím proměnnou.“ Na tabuli napsal příklad viz obr. 63.



Obrázek 63: Tomášův příklad na dělení jednočlenu jednočlenem

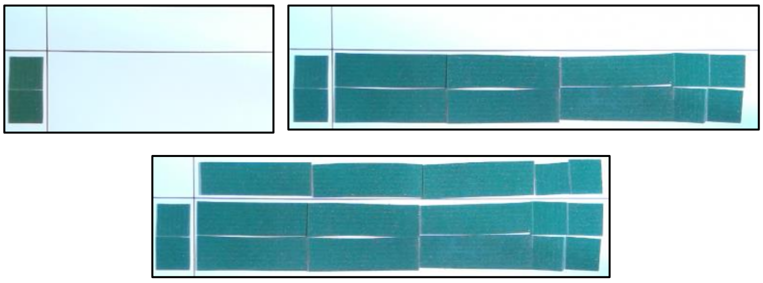
Druhý způsob vycházel z násobení. Představila nám ho Katka: „Když si vezmu Tomášův příklad, tak já si u něho řeknu, čím mám vynásobit $3x$, abych dostala $9x^2$? No, a to vidím, že je to $3x$.“ Žáci si své výsledky kontrolovali ve dvojicích v lavicích. V 8.A tuto hodinu označili za odpočinkovou.

Dělení mnohočlenu jednočlenem

Na začátku 33. vyučovací hodiny si žáci zopakovali dělení jednočlenů v součinových čtvercích. Další úloha začínala určením obsahů obdélníků, a to ze dvou důvodů. Prvním důvodem bylo zopakování násobení mnohočlenů a druhým důvodem byl úvod do dělení mnohočlenu jednočlenem. Žáci pracovali ve skupinách, kde společně hledali řešení, pak jeden žák ze skupiny prezentoval řešení u tabule. Žáci využili podobnosti úloh, které byly zadané tuto hodinu s úlohami z rozcvičky z minulé hodiny.

Procvičování

Při 34. vyučovací hodině žáci procvičovali dělení mnohočlenů jednočlenem. Ve třídě se vytvořily dvě skupiny žáků. První skupina využila zkušeností z dělení jednočlenů a použila ke znázornění dělení dlaždice (obr. 64), druhá skupina využila také znalostí z dělení jednočlenů, ale bez použití dlaždic. Toto řešení prezentoval Pavel: „Mnohočlen jsem si rozdělil na jednotlivé členy a ty jsem postupně vydělil.“ K tomu na tabuli napsal příklad (obr. 65).



Obrázek 64: Použití dlaždic při dělení mnohočlenu jednočlenem

$$(2a^2+4a):2a = a+2$$

Obrázek 65: Ukázka řešení dělení bez podpory dlaždic

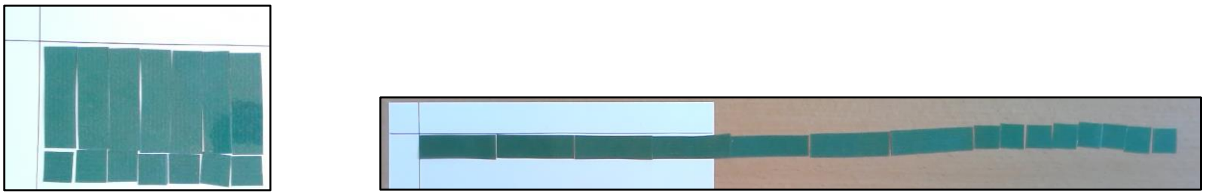
Obě skupiny navzájem sdílely své zkušenosti a snažily se obhájit svůj postup jako ten lepší. V závěru se žáci shodli, že lze použít obě řešení a každý by měl použít to, co mu vyhovuje, ale může se nechat inspirovat jiným řešením.

Procvičování

Další hodinu žáci opět procvičovali dělení mnohočlenů jednočlenem. Žáci, kteří minulou hodinu při řešení používali algebraické dlaždice, se pokusili řešit bez nich nebo je použili jen ke kontrole. V druhé části hodiny hráli oblíbené domino.

Vytýkání

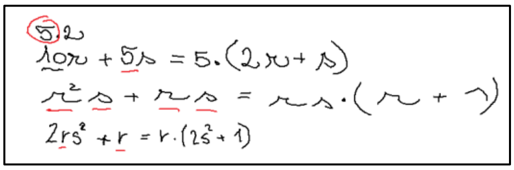
Třicátá šestá hodina byla ve znamení vytýkání. Na úvod žáci řešili úlohy na násobení mnohočlenů a doplňování rozměrů obdélníků. Podobnou úlohu na doplňování rozměrů obdélníků už žáci řešili během 33. vyučovací hodiny, tam ale jeden z rozměrů obdélníků znali. Nyní měli za úkol najít oba dva rozměry. Někdo z žáků prohlásil, že je to jako u dělení, ale čím budeme dělit, si vybíráme sami. Žáci si vzali dlaždice a snažili se sestavovat obdélníky z dlaždic, které představovaly obsah obdélníku. U některých našli žáci více řešení (obr. 66).



Obrázek 66: Obdélníky s obsahem 7x +1

I když jsme si vytýkání ukazovali na algebraických dlaždicích, tak se tentokrát všichni shodli, že bez nich to je jednodušší, že vlastně hledají, co je stejné u jednotlivých členů, a to „z nich vyndají ven".

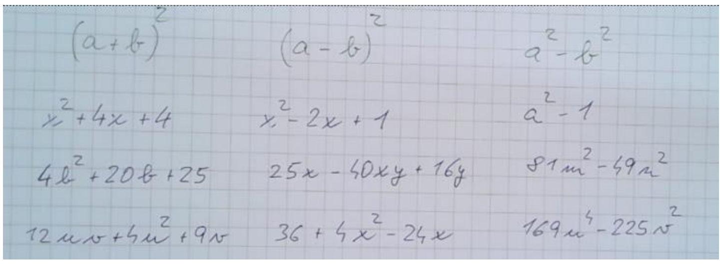
Další hodinu žáci procvičovali vytýkání. Během řešení úloh, které již nešly znázornit pomocí algebraických dlaždic, si žáci pomáhali vyznačením toho, co mají jednotlivé členy společné (obr. 67).



Obrázek 67: Ukázka vytýkání

Rozklad na součin podle vzorců

Následující tři vyučovací hodiny žáci procvičovali rozklad na součin podle vzorců. První hodinu řešili úlohy z učebnice, druhou hodinu měli za úkol vymyslet tři příklady ke každému vzorci s různou obtížností (obr. 68). Navzájem si tyto úlohy vyměnili a vyřešili.



Obrázek 68: Ukázka úloh

Třetí hodinu žáci pracovali ve skupinách a procvičovali si rozklady formou her – loto a pexeso. Některé skupiny pexeso vzdaly a změnily hru v přiřazování odpovídajících kartiček k sobě.

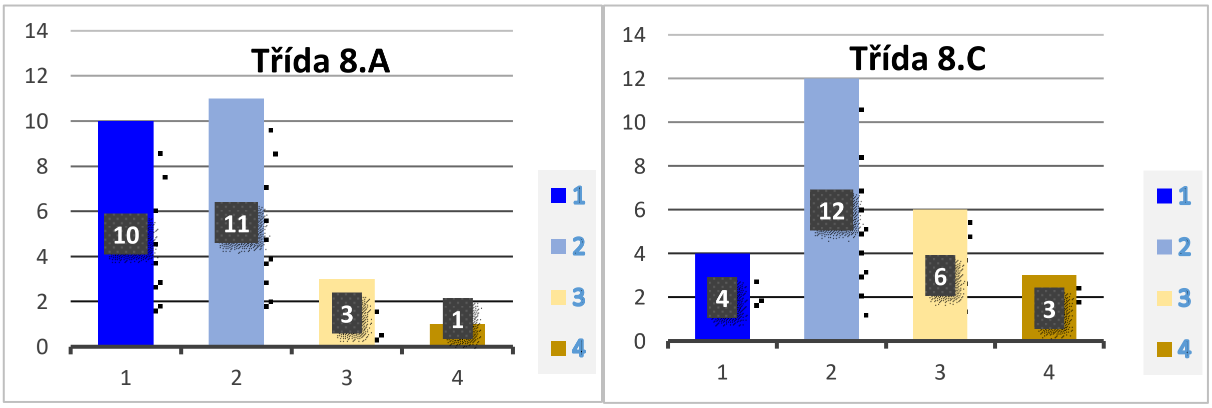
Další hodina byla věnovaná vytváření přehledů, myšlenkových map (příloha 7), které měly sloužit k zopakování učiva. Žáci mohli využívat svoje zápisy a učebnice. Následující hodinu jsme využili k opakování, žáci sami navrhovali úlohy, které chtějí řešit.

4.4 Vyhodnocení experimentu

Experiment probíhal ve dvou třídách. Během výuky byli žáci 8. A aktivnější, sami přicházeli se zajímavými podněty. Žáci 8. C byli často v hodinách pasivní, bylo potřeba vybízet je k aktivitě, ptát se jich a občas se i stalo, že jsem si na dotaz odpověděla sama.

Pro pochopení úprav výrazů s proměnnou jsem použila algebraické dlaždice. Ze začátku je někteří žáci odmítali používat. Postupně ale změnili názor na základě pozitivního přístupu aktivnějších spolužáků. Po celou dobu výuky měli žáci dlaždice k dispozici. Při zahájení nové látky je používali více, po určitém čase procvičování je používali čím dál méně nebo jen ke kontrole výsledků. Při procvičování jsem se snažila střídat různá prostředí, aby bylo procvičování zajímavější.

Na závěr žáci psali post–test, resp. závěrečný test. Průměrná známka v 8. A byla 1,8 a v 8. C byla 2,3. Rozložení známek viz obr. 69. Při porovnání výsledků tohoto testu s pololetními známkami (obr. 19 a 20) lze říci, že výuka byla úspěšná.



Obrázek 69: Výsledky závěrečného testu

Úlohu 1 [Načrtni, co by mohlo být v geometrii znázorněním výrazu $2x$] měli všichni žáci správně. Myslím si, že je to proto, že jsem ve výuce často řadila úlohy na obsah nebo obvod obdélníku, třeba jen v rozcvičce nebo úvodní úloze.

Ve druhém cvičení byly základní úlohy, ve kterých jsem chtěla zjistit, jak žáci umí zjednodušit výrazy pomocí standardních manipulací. V úloze 2a) $[5a^2 + 3a + 6 - 2a^2 - 3 + 2a]$ někteří žáci chybovali, objevili se zde numerické chyby, problém s počítáním s celými čísly. Při řešení úlohy 2b) $[(2x + 1) - (x + 1)]$ se žáci rozdělili do třech skupin. V první skupině (více jak polovina žáků) žáci odstranili závorky a výraz zjednodušili, zde se objevily pouze 2 chyby. Ve druhé skupině žáci rovnou výraz zjednodušili, zde se objevilo už více chyb, evidentně to byly chyby velkého skoku. Ve třetí skupině byli čtyři žáci, kteří k zjednodušení tohoto výrazu použili vytýkání a vzorec, tato řešení byla bez chyby. V úloze 2c) $[(2a + 4)(3a - 5)]$ chybovalo 10 žáků. Objevily se zde chyby z nepozornosti (jeden žák zapomněl na jeden člen), numerické chyby i chyby z neznalosti. Čtyři žáci si načrtli dlaždice a správně úlohu vyřešili. Úlohu 2d) $[(15x^2 + 25x - 5xy) : 5x]$ pět žáků ani nezačalo řešit, devět dalších ji nemělo správně.

První část úlohy 3 $[6p$ ….. 7 ….. $2p = 8p + 7]$ měli všichni žáci správně. Druhou část úlohy $[6p$ ….. 7 ….. $2p = 12p^2 - 14p]$ měla jedna třetina žáků chybně. V této úloze bylo potřeba použít vhodným způsobem závorky. Někteří žáci si při řešení nakreslili obdélník a do něj si kreslili „dlaždicové“ rozdělení.

U úlohy 4a) chybovalo 5 žáků, u úlohy 4b), která je už náročnější, chybovala téměř polovina žáků. Obvykle proto, že zapomněli použít závorky.

V úloze 5 $[2x + 5 = 2]$ úlohu 5a) $[3(2x + 5)]$ vyřešili všichni žáci správně. U úlohy 5b) $[-1\cdot(2x + 5) - 1\cdot(2x + 5)]$ se zřejmě někteří žáci zalekli záporných čísel, správně dosadili, ale nedopočítali. Na můj dotaz „proč“ jsem dostala odpovědi: „Bylo to divný.“ „Nebyl jsem si jistý, tak jsem radši nic nenapsal.“ Tři žáci tuto úlohu neřešili. Úlohy 5c) $[2x + 6]$ a 5d) $[2x + 4]$ 15 žáků neřešilo, 10 a 11 žáků mělo chybu.

U úlohy 6 chybovalo 8 žáků, 6 žáků si při řešení pomáhalo nákresem algebraických dlaždic, což bylo zajímavé. Zeptala jsem se, jak jim pomohly dlaždice, když jsou v úloze desetinná čísla. Všichni se shodli v tom, že řešili znaménka, protože ta se v závorkách liší. Tito žáci měli úlohu vyřešenou správně.

Úlohu 7a) měli všichni žáci správně. U úlohy 7b) měli všichni správně obsah trojúhelníku., ale obvod mělo jen málo žáků. Nenapadlo je, že délku přepony mohou určit Pythagorovou větou. Úloha 7c) byla bonusová, žáci ji řešili jen, když jim zbýval čas a chuť řešit. Úlohu řešilo 21 žáků a z toho 10 správně. To je znakem toho, že se algebraické dlaždice pro ně staly generickým modelem a dovedli je využít pro řešení úlohy, která přesně pomocí nich vymodelovat nejde.

Testy jsem měla připravené dva – skupinu A a B, aby žáky nelákalo opisovat. Obtížnost testů byla srovnatelná. Pro názornost jsem v předchozím textu použila úlohy skupiny A.

Z rozboru úloh je vidět, že žáci vesměs porozuměli principu jednotlivých úprav a že uměli využít i souvislosti s geometrií. V řešeních některých žáků byly známky toho, že se algebraické dlaždice pro ně staly generickým modelem, který jim umožnil řešit i úlohy, které pomocí nich modelovat přesně nejdou. Samozřejmě nelze říct, že u dalších žáků tomu také tak nebylo. Prostřednictvím algebraických dlaždic se mohli dostat na abstraktní úroveň a vědomě je již při řešení nepoužívat.

Kromě závěrečného testu jsem žákům dala dotazník, kde měli ohodnotit sami sebe při řešení jednotlivých úloh. Výsledek tohoto šetření je uveden v tabulce (tab. 3). Vyplývá z něho, že práci s algebraickými dlaždicemi žáci hodnotili pozitivně.

		Počítám v pohodě	Občas potřebuji pomoc	Zvládám pouze jednoduché příklady	Stále mi to nejde	Celkem odpovědělo
1	počítání s proměnnou	15	25	5	5	50
2	sčítání a odčítání mnohočlenů	13	21	9	7	50
3	násobení mnohočlenů	12	18	12	8	50
4	dělení mnohočlenů	12	16	13	9	50
5	umocňování mnohočlenů	13	16	12	9	50
6	rozklad na součiny	13	20	9	8	50
7	vytýkání	14	22	10	4	50
8	příklady řešené pomocí algebraických dlaždic	18	24	5	3	50
	průměrný výsledek	**13,8**	**20,3**	**9,4**	**6,6**	

Tabulka 3: Vyhodnocení žákovského dotazníku

5 Závěr

Práce je zaměřena na výuku výrazů s proměnnou v osmém ročníku. Nejprve jsem prostudovala kurikulární dokumenty, kde jsem zjistila, jaké jsou očekávané výstupy týkající se daného tématu. Dále jsem si prostudovala konstruktivistické pojetí výuky zvláště pak tzv. desatero konstruktivismu (Hejný, Kuřina, 2015, s.194), ve kterém je obecný konstruktivistický přístup přetvořen s ohledem na specifika vyučování matematiky. Při plánování výuky bylo také důležité znát tři pilíře výuky výrazů s proměnnou, kterými jsou číselné řady a aritmetika, geometrie a úlohy na zobecňování. Vzhledem k tomu, že k výuce patří i práce s chybou, tak ve své práci uvádím sedm druhů chyb při úpravách výrazů podle Hejného (1990, s. 155).

Prvním cílem této práce byla analýza zpracování tématu v šesti učebnicích matematiky pro 8. ročník (jedna z nich byla pro odpovídající ročník víceletého gymnázia). V učebnicích jsem se zaměřila na to, jak jednotliví autoři přistupují k hladině modelování a k hladině strategických manipulací, jak zavádějí proměnnou, jaký význam proměnná má, jak je v učebnicích zavedeno sčítání, odčítání a násobení a jaké jsou v nich úlohy na procvičení. Pro porovnání jednotlivých učebnic jsem sestavila přehledné tabulky (tabulka 1 a 2). Osobně bych volila učebnici nakladatelství Fraus, autorského kolektivu Binterová, Fuchs, Tlustý (2009), a učebnici pro víceletá gymnázia od Hermana a kol. (1995, 2000).

Druhým cílem bylo připravit, uskutečnit a vyhodnotit výukový experiment. Experiment proběhl ve dvou třídách. Výuka byla vedena snahou o vytvoření podnětného prostředí s využitím algebraických dlaždic. K vyhodnocení výuky jsem sestavila test, při jehož sestavování jsem se inspirovala Metodickými komentáři ke Standardům pro základní vzdělávání. Pro žáky jsem kromě testu připravila také dotazník, ve kterém žáci měli vyhodnotit svoje znalosti a dovednosti, které získali. Z výsledku testu vyplývá, že dané téma žáci vcelku úspěšně zvládli.

Domnívám se, že se mi podařilo naplánovat a realizovat výuku, která byla z mé strany vedena podnětným způsobem a u žáků vedla k dobrým výsledkům, co se týče porozumění podstatě úprav algebraických výrazů. V práci jsem podrobně popsala řadu konkrétních situací z výuky, které mohou být inspirativní i pro další učitele a mohou současně přesněji ukázat, v čem jsou přínosy či úskalí algebraických dlaždic. Tuto výukovou pomůcku bych pro výuku algebraických úprav jednoznačně doporučila.

Hlavním cílem učitele je ukázat žákům cesty k novým poznatkům. Učitele bych přirovnala k průvodci. Když průvodce vypráví zajímavou formou, tak ho celá skupina turistů sleduje a nenechá si uniknout ani slovo. Když ale průvodce vypráví potichu nebo nezajímavě, tak se mu turisté rozprchnou. S žáky je to podobné. Mým hlavním cílem bylo žáky něco nového naučit a při tom je zaujmout. Myslím si, že se mi to podařilo, i když v mých třídách je několik „odolných“ jedinců, které mým snahám odolávají. Jsem přesvědčena, že se mi podařilo na žáky přenést radost a zaujetí, které jsem prožívala při řešení prvních úloh s algebraickými dlaždicemi na hodinách didaktiky, a za to jsem ráda.

Použité zdroje:

HEJNÝ, M., a kol. (1990). *Teória vyučovania matematiky 2*. 2. vyd. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo.

BÍLEK, V. (2014). *Žákovské obtíže a chyby při úpravách algebraických výrazů* [Diplomová práce]. Dostupné z www: https://is.cuni.czwebapps/zzp/download/120175756/.

BINTEROVÁ, H., FUCHS, E., TLUSTÝ, P. (2009). *Matematika 8: pro základní školy a víceletá gymnázia*. Plzeň: Fraus.

COUFALOVÁ, J., PĚCHOUČKOVÁ, Š., HEJL, J., LÁVIČKA, M. (2007). *Matematika pro 8. ročník základní školy.* 2., upr. vyd. Praha: Fortuna.

DVOŘÁKOVÁ, J. a kol. (2013). *Standardy pro základní vzdělávání. Matematika a její aplikace* [online]. Praha: Národní ústav pro vzdělávání, [cit. 2019-10-24]. Dostupné z www: https://digifolio.rvp.cz/artefact/file/download.php?file=67490&view=9832

FORMÁNEK, J. (2012). *Pexeso – rozklad výrazů na součin pomocí vzorců.* Dostupné z www: http://dumy.cz/material/676-rozklad-vyrazu-na-soucin-pomoci-vzorcu

FUCHS, E., ZELENDOVÁ E., eds. (2015). *Metodické komentáře ke Standardům ZV k oboru matematika* [online]. Praha: Národní ústav pro vzdělávání [cit. 2019-10-28]. Dostupné z www: http://www.nuv.cz/t/metodicke-komentare

FUCHS, E., ZELENDOVÁ E., eds. (2013). *Standardy pro základní vzdělávání*. *Matematika a její aplikace.* [online]. Praha: Národní ústav pro vzdělávání [cit. 2019-10-24]. Dostupné z www: https://digifolio.rvp.cz/artefact/file/download.php?file=67490&view=9832

HEJNÝ, M., EICHLEROVÁ, K., ŠALOM, P., a kol. (2016). *Matematika*. Praha: H-mat.

HEJNÝ, M., EICHLEROVÁ, K., ŠALOM, P. (2016). *Matematika*. *Pracovní sešit A.* Praha: H-mat.

HEJNÝ, M., NOVOTNÁ, J., STEHLÍKOVÁ, N., eds. (2004). *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky.* Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

HEJNÝ, M., KUŘINA, F. (2015). *Dítě, škola a matematika,* 3. vydání. Praha: Portál.

HEJKRLÍK, P., a kol. (2010) *Matematika: sbírka řešených příkladů.* Opava: Hejpa.

HERMAN, J., a kol. (1995). *Matematika: sekunda, Výrazy [1]*. Praha: Prometheus.

HERMAN, J., a kol. (2009). *Matematika: tercie*, *Výrazy [2].* Dotisk 1. vyd. Praha: Prometheus.

JEDLIČKOVÁ, M., KRUPKA, P., NECHVÁTALOVÁ, J. (2016). *Matematika, Výrazy a rovnice 1*. Brno: Nová škola. Duhová řada.

JEDLIČKOVÁ, M., KRUPKA, P., NECHVÁTALOVÁ, J. (2018). *Matematika, Výrazy a rovnice 2*. Brno: Nová škola. Duhová řada.

KADLEČEK, J., ODVÁRKO, O. (1999). *Matematika pro 8. ročník základní školy [1].* Praha: Prometheus.

KALHOUS, Z., OBST, O. a kol. (2009). *Školní didaktika*. Vyd. 2. Praha: Portál.

KLEZLOVÁ, M. (2009). *Výuka algebraických výrazů s využitím konstruktivistických principů v hodinách matematiky na základní škole* [Diplomová práce]. Dostupné z www: https://theses.cz/id/xvl14k/

MALÍK, M. a kol. (2017). *Hravá matematika pro 8. ročník.* 2. vyd. Praha: Taktik

Ministry of Education: *Patterning and algebra*, grades 4 to 6. (2008). Toronto. Ontario. [online]. [cit. 2015-12-08]. Dostupné z www: http://thelearningexchange.ca/wp-content/uploads/2017/01/Patterning-and-Algebra-4-6.pdf

PECINA, P., ZORMANOVÁ L. (2009*). Metody a formy aktivní práce žáků v teorii a praxi*. Brno: Masarykova univerzita, Pedagogická fakulta.

POKORNÝ, A. (2017). *Výrazy s proměnnou v učivu základní školy* [Diplomová práce]. Dostupné z www: https://is.cuni.cz/webapps/zzp/detail/134232/

PŮLPÁN, Z., ČIHÁK, M., TREJBAL, J., BOUŠKOVÁ, J. (2009). *Matematika 8 pro základní školy*. Praha: SPN – pedagogické nakladatelství.

RVP ZV (2017) [online]. Praha: MŠMT. [cit. 2019-08-22] Dostupné z www: http://www.nuv.cz/t/aktualne-platne-zneni-rvp-zv

STEHLÍKOVÁ, N., HEJNÝ M., KUBÍNOVÁ, M. (2007). *Náměty na podnětné vyučování v matematice*. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

VONDROVÁ, N., NOVÁKOVÁ, E. (2015). Tematické okruhy Číslo a početní operace, Číslo a proměnná. In *Metodické komentáře ke Standardům ZV k oboru matematika* [online]. Praha: Národní ústav pro vzdělávání [cit. 2019-10-28], s. 8–41. Dostupné z www: http://www.nuv.cz/t/metodicke-komentare

VONDROVÁ, N. (2019). *Didaktika matematiky pro učitele jako nástroj zvládání kritických míst v matematice.* Praha: PedF UK

WILLERS, M. (2012). *Algebra bez (m)učení: od arabských matematiků k tajným šifrám: matematika v každodenním životě: fascinující čísla a rovnice*. Přeložil Marek ČTRNÁCT. Praha: Grada.

Přílohy

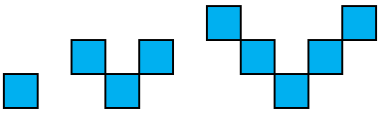
Příloha 1: Pre–test

1. Vyřeš: $9 + (-4) =$
2. Vyřeš: $-8 : (1 + 3) - 1 =$
3. Najdi součet čísel – 15 a 10
4. Rozdíl druhých mocnin čísel 4 a 3
5. $3 \cdot 2^2 + 5 \cdot 4 - 8 =$
6. Vyřeš: $\frac{4}{5} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} =$
7. Vyřeš: $-\frac{2}{5} \cdot \frac{15}{4} =$
8. Vyřeš: $\frac{4}{5} : (-\frac{8}{25}) =$
9. Vyřeš: $-[-2(3^2 - (5 - 4))] =$
10. Vyřeš, výsledek uveď v základním tvaru: $(-\frac{4}{3})(\frac{5}{12})(\frac{9}{10}) =$
11. Vyřeš: $-6^2 =$
12. Vyřeš: $(-6)^2 =$
13. Vyřeš: $\frac{x^6}{x^4} =$
14. Zjisti velikost x: $\frac{x}{24} = \frac{3}{8}$
15. Zjisti velikost x: $x + 3 = 10$

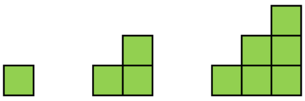
Příloha 2: Pracovní list 1 – Číselné řady

1. Znáte první tři členy číselných řad. Jak budou řady pokračovat? Napište další 2 členy. Obrázky vám napoví.

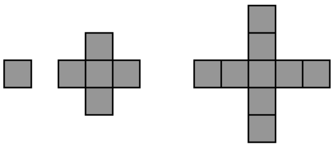
a) 1, 3, 5, ?, ?



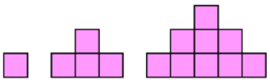
b) 1, 3, 6, ?, ?



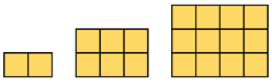
c) 1, 5, 9, ?, ?



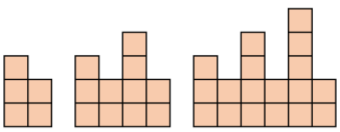
d) 1, 4, 9, ?, ?



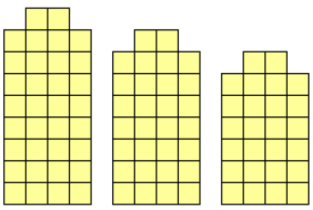
e) 2, 6, 12, ?, ?



f) 3, 2, 4, 2, 5, 2, 6, 2, ?, ?,



g) 34, 30, 26, ?, ?



2. U řad z předcházejícího cvičení najdi další členy.

a)

krok	1	2	3	4	5	10	20	100	n
číselná řada	1	3	5						

b)

krok	1	2	3	4	5	10	20	100	n
číselná řada	1	3	6						

c)

krok	1	2	3	4	5	10	20	100	n
číselná řada	1	5	9						

d)

krok	1	2	3	4	5	10	20	100	n
číselná řada	1	4	9						

e)

krok	1	2	3	4	5	10	20	100	n
číselná řada	2	6	12						

f)

krok	1	2	3	4	5	10	20	100	n
číselná řada									

g)

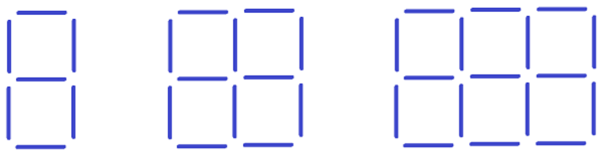
krok	1	2	3	4	5	10	20	100	n
číselná řada	34	30	26						

Příloha 3: Pracovní list 2 – Geometrické vzory

1. Z dřívek postupně tvoříme obrazce. Na první obrazec potřebujeme 4 dřívka, na druhý obrazec potřebujeme 7 dřívek atd. Doplňte tabulku.

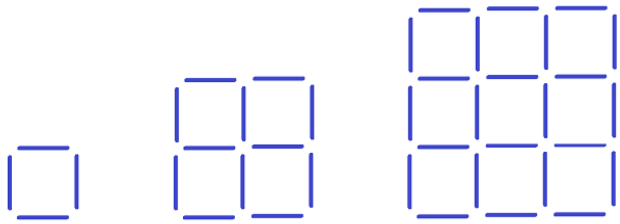
obrazec	1	2	3	4			10	100	N
počet dřívek	4	7							

2. Z dřívek postupně tvoříme obrazce. Na první obrazec potřebujeme 7 dřívek, na druhý obrazec potřebujeme 12 dřívek atd. Doplňte tabulku.



obrazec	1	2	3	4			10	100	N
počet dřívek	7	12							

3. Z dřívek postupně tvoříme obrazce. Na první obrazec potřebujeme 4 dřívka, na druhý obrazec potřebujeme 7 dřívek atd. Doplňte tabulku. (Matematika C pracovní sešit, nakl. H-mat s.27)



obrazec	1	2	3	4				10	n
počet dřívek	4	12							

4. Z dřívek stavíme „trojúhelníková pohoří“. Zjistěte, kolik dřívek má pohoří, jehož počet hor je 2, 3, 4, 10, n. (Matematika C pracovní sešit, nakl. H-mat s. 26)

obrazec	1	2	3	4				10	N
počet dřívek	6								

Příloha 4: Domino – násobení mnohočlenu jednočlenem

$(a-3)\cdot 2$	$-4a-6a^2$
$(2a-1)\cdot 4a$	$2a-6$
$2a\cdot(3a-4)$	$8a^2-4a$
$3\cdot(a-1)$	$6a^2-8a$
$4\cdot(2a+9)$	$3a-1$
$(6a+1)\cdot 2a$	$8a-36$
$(9+2a)\cdot 2$	$12a^2+2a$
$3a\cdot(5+2a)$	$18+4a$
$3\cdot(2+a)$	$15a+6a^2$

$3a\cdot(1-4a)$	$3a+6$
$2\cdot(1+2a)$	$3a-12a^2$
$(3-4a)\cdot 5$	$2+4a$
$3a\cdot(-2+a)$	$-20a+15$
$(5a-16)\cdot(-1)$	$-6a+3a^2$
$2a\cdot(a^2-3)$	$16-5a$
$(4a+1)\cdot 2a$	$2a^3-6a$
$(-5-2a)\cdot(-2)$	$8a^2+2a$
$(2a+3)\cdot 4$	$10+4a$

$(3a-2)\cdot 2a$	$12+8a$
$(3a+2)\cdot(-2a)$	$6a^2-4a$

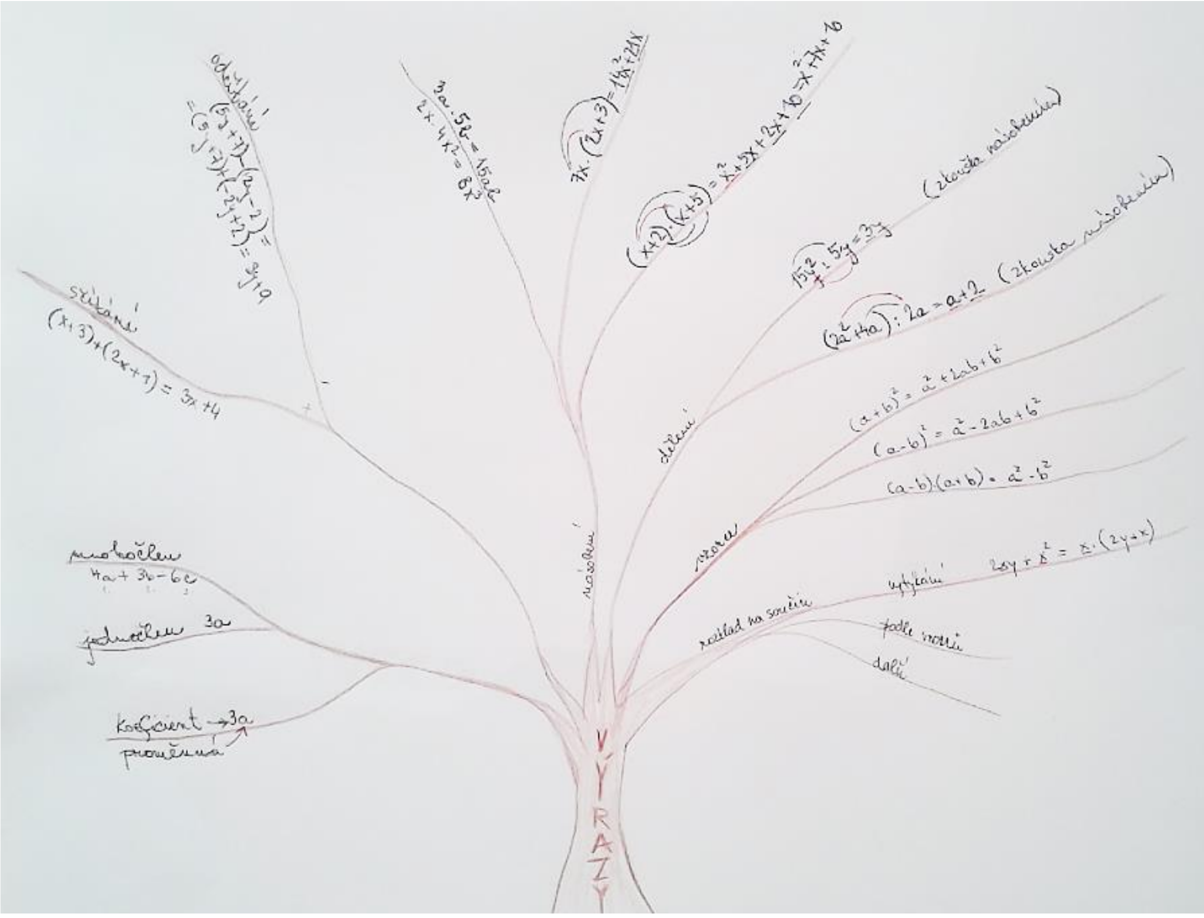
Příloha 5: Domino – násobení mnohočlenů

$(2a+4).(2+a)$	a^2-a-2	$(1-2a).(5+a)$	a^2+5a+6
$(a-2).(a+3)$	$2a^2+8a+8$	$(a-2).(a+1)$	$5-2a^2-6a$
$(6+a).(4+a)$	$a+a^2-6$	$(3+a).(a-4)$	a^2+a-2
$(a-3).(a+2)$	$a^2+10a+24$	$(a-2).(a+5)$	$-12-a+a^2$
$(2-3a).(1+a)$	a^2-a-6	$(a-2).(a-1)$	$a^2+3a-10$
$(2a+1).(a+2)$	$2-3a^2-a$	$(a+2).(a-1)$	a^2-3a+2
$(5-a).(3-a)$	$2a^2+5a+2$	$(a-3).(a+4)$	a^2+a-2
$(2a-4).(a+2)$	$a^2-8a+15$	$(a-3).(a-4)$	a^2+a-12
$(a+2).(a+3)$	$2a^2-8$	$(a-2).(a+1)$	$a^2-7a+12$

Příloha 6: Domino – vzorce

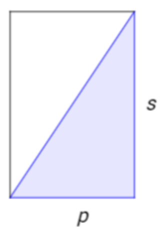
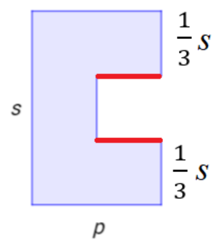
$9 - 6a + a^2$	$(2a + 3)^2$
$25 - 4a^2$	$(a - 3)^2$
$a^2 - 4b^2$	$(5 - 2a).(5 + 2a)$
$9a^2 - 1$	$(a - 2b).(a + 2b)$
$4a^2 - 9$	$(3a + 1).(3a - 1)$
$9a^2 - 6a + 1$	$(2a - 3).(2a + 3)$
$9 + 6a + a^2$	$(3a - 1)^2$
$a^2 - 2ab + b^2$	$(a + 3)^2$
$9 + 12a + 4a^2$	$(a - b)^2$

Příloha 7: Myšlenková mapa

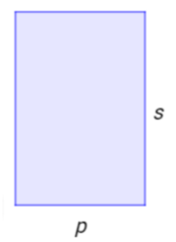
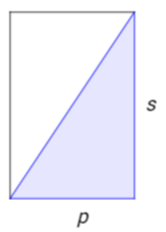
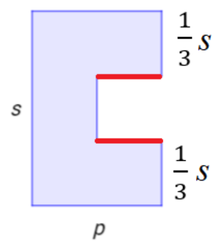


Příloha 8: Závěrečný test (Vondrová, Nováková, 2015)

M 8 – Závěrečný test – Výrazy s proměnnou – A **Jméno:** **Třída:** **Datum:**	
1) Načrtni, co by mohlo být v geometrii znázorněním výrazu $2x$	2 b
2) Zjednodušte: a) $5a^2 - 3a - 6 - 2a^2 + 3 + 2a =$ b) $x(x + 1) - (x + 1) =$ c) $(2a + 4)(3a - 5) =$ d) $(15x^2 + 25x - 5xy) : 5x =$	8 b
3) Doplň místo teček znaménko operací. Můžeš použít závorky $6p$ ….. 7 ….. $2p = 8p + 7$ $6p$ ….. 7 ….. $2p = 12p^2 - 14p$	3 b
4) Jsou dány výrazy $a = 1 + x$ $b = 2 - x$ Zjisti, kolik je a) $2a + b$ b) $2a - b$	4 b

5) Platí, že $2x + 5 = 2$. Najdi hodnotu následujících výrazů: a) $3(2x + 5) =$ b) $-1\cdot(2x + 5) - 1\cdot(2x + 5) =$ c) $2x + 6 =$ d) $2x + 4 =$	5 b
6) Urči, které z výrazů se sobě rovnají $(0{,}5x - 0{,}3y)^2$ $\quad$ $(-0{,}5x + 0{,}3y)^2$ $(-0{,}5x - 0{,}3y)^2$ $\quad$ $(0{,}5x + 0{,}3y)^2$	4 b
7) Urči obvod a obsah vybarveného obrazce a)  b)  *c) červená úsečka má délku $0{,}5p$ 	4 b
Celkový počet bodů *Poznámka: úloha 7*c) je bonusová úloha pro zájemce za 2 body*	30 b

M 8 – Závěrečný test – Výrazy s proměnnou – B **Jméno:** **Třída:** **Datum:**	
1) Načrtni, co by mohlo být v geometrii znázorněním výrazu $3y$	2 b
2) Zjednodušte: e) $4a^2 - 2a + 5 - 2a^2 - 6 + a =$ f) $x(x + 2) - 2(x + 2) =$ g) $(3a + 4)(6a - 2) =$ h) $(16x^2 - 4xy + 24x) : 4x =$	8 b
3) Doplň místo teček znaménko operací. Můžeš použít závorky a) $3p$ ….. 5 ….. $4p = 7p + 5$ b) $3p$ ….. 5 ….. $4p = 15p - 12p^2$	3 b
4) Jsou dány výrazy $a = 2 + x$ $b = 1 - x$ Zjisti, kolik je a) $2a + b$ b) $2a - b$	4 b

5) Platí, že $3x + 4 = 2$. Najdi hodnotu následujících výrazů: a) $3(3x + 4) =$ b) $-1 \cdot (3x + 4) - 1 \cdot (3x + 4) =$ c) $3x + 5 =$ d) $3x + 3 =$	5 b
6) Urči, které z výrazů se sobě rovnají $(-0{,}2x + 0{,}4y)^2$ $(0{,}2x + 0{,}4y)^2$ $(-0{,}2x - 0{,}4y)^2$ $(0{,}2x - 0{,}4y)^2$	4 b
7) Urči obvod a obsah vybarveného obrazce a)  b)  c) červená úsečka má délku $0{,}5p$ 	4 b
Celkový počet bodů *Poznámka: úloha 7*c) je bonusová úloha pro zájemce za 2 body*	30 b

Úlohy 1,2f, 3, 4 a 5 jsem převzala z Metodických komentářů ke Standardům ZV na s. 32, 37, 35 a 36. Úlohu 7 jsem převzala z učebnice matematiky Kadleček, Odvárko (1999) s. 85.

Klasifikace podle bodového hodnocení:

1	30 – 28 bodů
2	27 – 22 bodů
3	21 – 13 bodů
4	12 – 7 bodů
5	6 – 0 bodů